

CLASSIFIED COPY

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

C-O-N-F-I-D-E-D-N-T-I-A-L

25X1

COUNTRY	USSR	REPORT	
SUBJECT	Soviet Publication: <u>Collected Works of the Institute of Structural Mechanics, No. 18</u>	DATE DISTR.	8 February 1957
		NO. PAGES	1
		REQUIREMENT NO.	
DATE OF INFO.		REFERENCES	
PLACE & DATE ACQ.			

25X1

25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

unclassified Soviet
publication, in Russian, entitled Sbornik Trudov Instituta Stroitel'noy
Mekhaniki (Collected Works of the Institute of Structural Mechanics),
published by the Ukrainian Academy of Sciences in 1953.

25X1

FEB 27 10 02 AM '57

CS/SI

C-O-N-F-I-D-E-N-T-I-A-L

STATE	X	ARMY	X	NAVY	X	AIR	X	FBI		AEC				
-------	---	------	---	------	---	-----	---	-----	--	-----	--	--	--	--

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

25X1

SBORNIK TRUDOV
СБОРНИК ТРУДОВ
INSTITUTA
ИНСТИТУТА
STROITEL'NOY MEKHANIKI
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

№ 18

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
КИЕВ — 1953

№ 18

СБОРНИК ТРУДОВ ИНСТИТУТА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

1953

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

СБОРНИК ТРУДОВ
ИНСТИТУТА
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

№ 18

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
КИЕВ — 1953

В настоящем сборнике помещены статьи, относящиеся к различным вопросам строительной механики. Одна часть статей посвящена, главным образом, решению задач о напряженном состоянии пластин и стержней. В другой части излагаются результаты экспериментальных исследований прочности стальных конструкций при переменных нагрузках.

Сборник рассчитан на работников научно-исследовательских учреждений и проектных организаций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Д. В. Вайнберг, Напряженное состояние плиты параболического профиля с отверстием	5
Э. И. Рашба, Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения	23
А. Д. Коваленко, Изгиб круглой пластинки переменной толщины кориолисовыми силами	28
А. И. Стрельбицкая, Косой изгиб металлических балок за пределом упругости	41
Ф. П. Белянкин, Коэффициент поддерживающего действия при изгибе деревянных балок	52
П. И. Семенов, Приближенный способ расчета гибких упругих стержней	62
[Б. И. Окс], Контурные особые точки кривого стержня	68
В. Е. Салион, Динамическая устойчивость двутавровой балки при внецентренном действии периодических сил	73
Н. Д. Жудин, Работа стальных неразрезных балок в упруго-пластической стадии при подвижной нагрузке	76
Н. И. Черняк, Усталостная прочность предварительно растянутой стали	103
Г. В. Карпенко, Смазочные масла как среда, понижающая выносливость стали	116
Г. В. Корнеев, Исследование прочности стальных конструкций, работающих при нерегулярных переменных нагрузках	134

Ответственный редактор
действительный член АН УССР Ф. П. Белянкин.

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
Академии наук Украинской ССР*

Редактор издательства Я. Л. Каплан.

Техредактор Н. С. Крыловская.

Корректор Л. Х. Почепина.

БФ 02543. Зак. № 33. Тираж 1000. Формат бумаги 70×108/16. Печ. листов 12,3. Учетно-издат. листов 12,6. Бум. листов 4,5. Подписано к печати 20/V 1953 г.

Типография Издательства АН УССР, Львов, Стефаника, 11.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем сборнике помещены статьи, посвященные различным вопросам строительной механики. Одна часть статей посвящена, главным образом, решению задач о напряженном состоянии пластин и стержней. В другой части излагаются результаты экспериментальных исследований прочности сталей при переменных нагрузках.

В статье Д. В. Вайнберга дано решение задачи о плоской деформации клина, ограниченного параболой, под действием собственного веса. Исследовано напряженное состояние около отверстия.

В статье Э. И. Рашба рассмотрено напряженное состояние массивных сооружений под действием собственного веса с учетом порядка их возведения.

В статье А. Д. Коваленко исследован несимметричный изгиб круглой пластинки, вызванный силами инерции при движении, называемом регулярной прецессией.

В статье А. И. Стрельбицкой предложен новый метод расчета стальных балок, работающих на косой изгиб за пределом упругости.

В статье Ф. П. Белянкина излагаются результаты теоретического и экспериментального исследования величины коэффициента поддерживающего действия при изгибе деревянных балок.

В статье П. И. Семенова предлагается приближенный способ расчета гибких стержней, применяемых в машиностроении и приборостроении.

В статье Б. И. Окса излагаются результаты исследования контурных особых точек кривого стержня при различной нагрузке на его концах.

В статье В. Е. Салиона рассматриваются изгибно-крутильные колебания высоких двутавровых балок под действием продольных периодических сил, приложенных эксцентрично.

В статье Н. Д. Жудина приведены результаты испытаний двухпролетных стальных балок при подвижной нагрузке в упруго-пластической стадии.

В статье Н. И. Черняка изложена разработанная автором новая методика измерения пластических деформаций и показано влияние предварительной деформации растяжения на выносливость стали в нормализованном состоянии.

В статье Г. В. Карпенко приведены данные о влиянии смазочных масел на выносливость сталей.

В статье Г. В. Корнеева излагается методика экспериментального исследования прочности элементов стальных конструкций, работающих при нерегулярных переменных нагрузках.

Сборник рассчитан на работников научно-исследовательских учреждений и проектных организаций.

ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ АКАДЕМИИ НАУК УССР
1953 СБОРНИК ТРУДОВ № 18

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОТИНЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ С ОТВЕРСТИЕМ

Д. В. Вайнберг

В статье приводится решение задачи о плоской деформации клина, ограниченного параболой второго порядка и находящегося под действием собственного веса. Исследована концентрация напряжений в плотине около эллиптического и круглого отверстий. Для этих случаев получены расчетные формулы и выполнены числовые примеры. Изложенная методика может быть приложена к случаям отверстий других очертаний.

1. Постановка задачи *

Напряженное состояние гравитационных плотин обычно определяется на основании уравнений плоской задачи теории упругости для бесконечного треугольного клина [1] либо с помощью приближенного метода, предложенного акад. Б. Г. Галеркиным для трапециoidalного

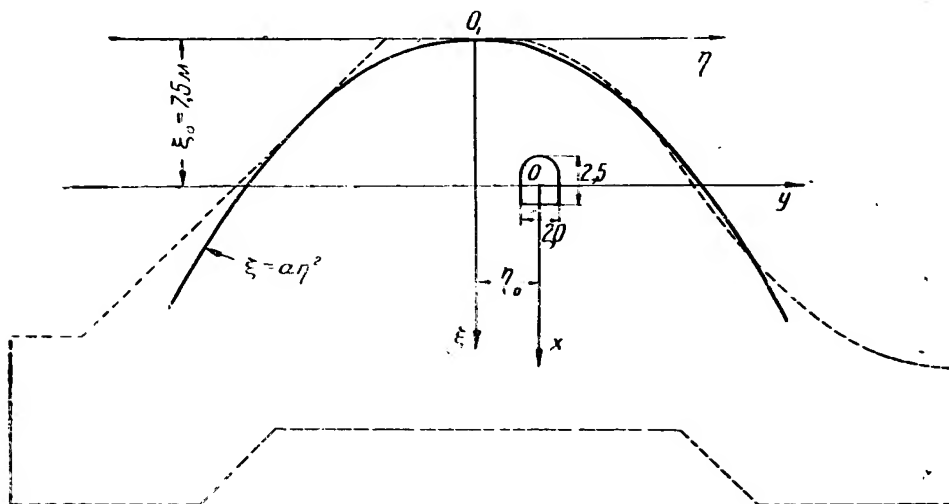


Рис. 1.

клина [2]. Между тем ряд плотин имеет более сложный профиль, контур которого в верхней части довольно хорошо аппроксимируется параболой второго порядка (рис. 1)

$$\xi = a\eta^2. \quad (1)$$

* В обсуждении постановки задачи приняли участие член-корреспондент АН УССР, профессор доктор технических наук Н. А. Пышкин, профессор доктор технических наук П. М. Варвак и кандидат технических наук Л. И. Дятловский.

Тело плотины имеет криволинейное отверстие. Контур отверстия — замкнутая кривая плоскости $z = x + iy = re^{i\vartheta}$, которая может быть отображена на окружность единичного радиуса плоскости $\zeta = x_1 + iy_1 = \varrho e^{i\vartheta}$, при помощи преобразования

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta^n} \right), \quad (2)$$

где R и m — положительные (действительные) постоянные; $n = 1, 2, 3, \dots$. Функция $\omega(\zeta)$ дает конформное отображение области плоскости z , расположенной вне отверстия, на внешность круга единичного радиуса плоскости ζ .

Для того чтобы отображающая функция (2) устанавливала взаимно однозначное соответствие точек обеих областей, включая и контуры, необходимо, чтобы в плоскости ζ вне круга единичного радиуса и на контуре его производная функции $\omega(\zeta)$ не обращалась бы в нуль. Это требование* удовлетворяется при

$$mn < 1. \quad (3)$$

Выбирая определенные значения параметров R , n и m , получим возможность исследовать отверстия различной конфигурации. Так, $n = 1$ соответствует отверстию в форме эллипса, отношение полуосей которого определяется величиной m из формулы (2); при $m = 0$ отверстие имеет форму круга.

При $n = 2$ имеем случай отверстия, ограниченного равносторонним криволинейным треугольником, одна из вершин которого лежит на оси x с положительной стороны.

При значении $n = 3$ функция (2) дает отображение контура в виде криволинейного квадрата с центром в начале координат и с вершинами, лежащими на координатных осях.

В книге проф. Г. Н. Савина „Концентрация напряжений около отверстий“ разработан эффективный приближенный метод отображения внешности почти любого многоугольного отверстия на внутренность единичного круга. Этот метод позволяет учитывать заданные радиусы закругления в углах отверстий.

Считая отверстие малым и достаточно удаленным от контура параболического клина, будем решать задачу приближенно, путем наложения двух напряженных состояний:

1) напряженного состояния $(\sigma_{\theta}^I, \sigma_{\varrho}^I, \tau_{\varrho\theta}^I)$ в сплошном теле, ограниченном параболой и находящимся (рис. 2) под действием приложенных к нему внешних сил (это состояние, следуя Г. Н. Савину, будем называть основным) и

2) напряженного состояния $(\sigma_{\theta}^{II}, \sigma_{\varrho}^{II}, \tau_{\varrho\theta}^{II})$ в неограниченной плоскости, ослабленной отверстием (рис. 3), при действии на контур этого отверстия напряжений (касательного и нормального к краю), равных по величине, но противоположных по знаку напряжениям, соответствующим напряженному состоянию 1. (Это напряженное состояние будем называть дополнительным.)

В таком случае выражения

$$\sigma_{\varrho} = \sigma_{\varrho}^I + \sigma_{\varrho}^{II}; \quad \sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^I + \sigma_{\theta}^{II}; \quad \tau_{\varrho\theta} = \tau_{\varrho\theta}^I + \tau_{\varrho\theta}^{II} \quad (4)$$

будут приближенным решением рассматриваемой задачи.

Некоторое искажение напряженного состояния мы получим на внешнем контуре параболы, где напряжения не будут точно равны заданным.

* См. [7].

Однако, учитывая, что возмущение, вносимое в силовое упругое поле устройством отверстия, носит местный характер и что размер отверстия в несколько раз меньше расстояния до внешнего контура клина, можно считать такое решение удовлетворительным.

2. Основное напряженное состояние в сплошном параболическом клине

В гравитационной плотине нагрузка от собственного веса более опасна для напряжений около отверстий, чем одновременное действие боковой гидростатической нагрузки и собственного веса.

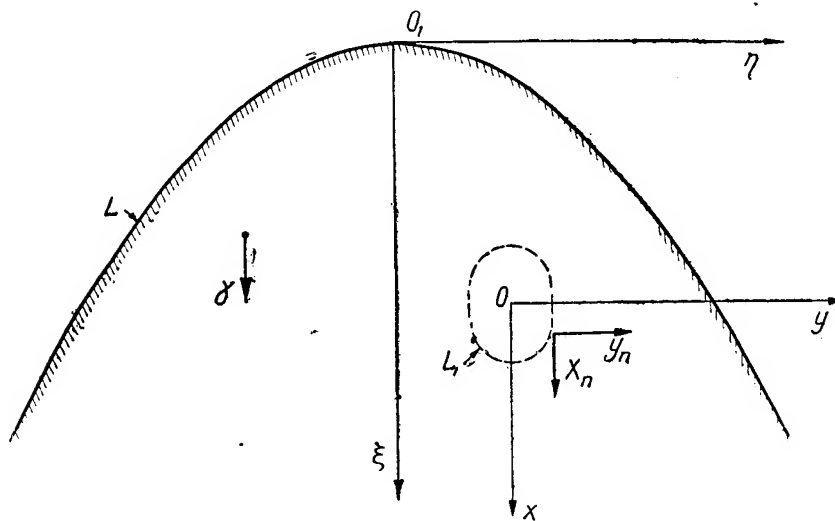


Рис. 2.

Рассмотрим сплошное тело, ограниченное параболой (рис. 2)

$$\xi = a\eta^2 \quad (5)$$

и находящееся под действием собственного веса

$$X = \gamma, \quad Y = 0,$$

где γ — весовая плотность.

Уравнения теории упругости для рассматриваемой здесь задачи будут:

$$\frac{\partial \sigma_{\xi}^I}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}^I}{\partial \eta} + \gamma = 0; \quad \frac{\partial \tau_{\xi\eta}^I}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta}^I}{\partial \eta} = 0 \quad (6)$$

с контурными условиями

$$\sigma_n^I = 0, \quad \tau_n^I = 0. \quad (7)$$

Выражая σ_n^I и τ_n^I через σ_{ξ}^I , σ_{η}^I и $\tau_{\xi\eta}^I$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_n^I &= \frac{\sigma_{\xi}^I - 4a\eta \tau_{\xi\eta}^I + 4a\xi \sigma_{\eta}^I}{4a\xi + 1}, \\ \tau_n^I &= \frac{2a(\sigma_{\eta}^I - \sigma_{\xi}^I)\eta + \tau_{\xi\eta}^I(4a\xi - 1)}{4a\xi + 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнений (6) будем искать в виде

$$\sigma_{\xi}^I = A + B\xi + C\eta; \quad \sigma_{\eta}^I = A_1 + B_1\xi + C_1\eta; \quad \tau_{\xi\eta}^I = A_2 + B_2\xi + C_2\eta. \quad (9)$$

Коэффициенты $A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2$ найдем, подставляя выражения (9) в уравнения (6) и используя при этом граничные условия (7) и зависимости (8).

В результате получим *

$$\sigma_{\xi}^I = -\frac{2}{3}\gamma\xi; \quad \sigma_{\eta}^I = -\frac{\gamma}{6a}; \quad \tau_{\xi\eta}^I = -\frac{\gamma}{3}\eta, \quad (10)$$

где a — параметр, входящий в уравнение (5) контура параболического клина.

3. Дополнительное напряженное состояние

Второй этап решения рассматриваемой задачи заключается в определении напряжений в бесконечной плоскости, ослабленной отверстием (рис. 3), к контуру которого приложены напряжения, найденные по формулам (10), но взятые с противоположным знаком.

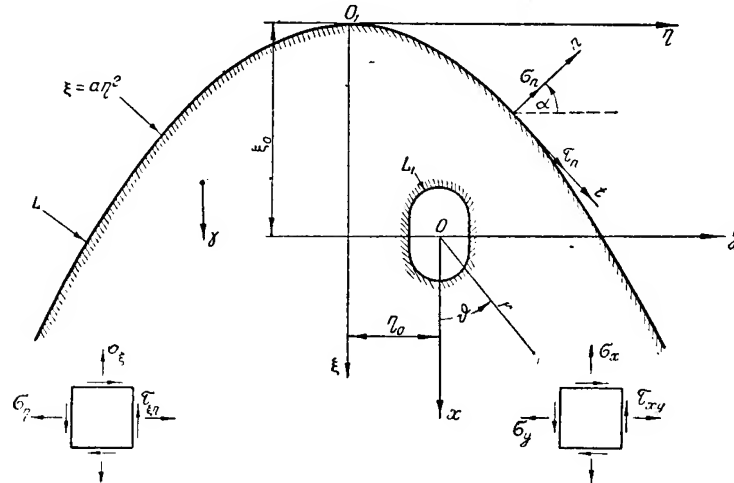


Рис. 3.

Следуя Н. И. Мусхелишвили, можно решение последней задачи свести к определению двух функций комплексного переменного $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ при следующих условиях на контуре исследуемой области:

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) + \frac{1}{\sigma^n} \cdot \frac{\sigma^{n+1} + m}{1 - mn\sigma^{n+1}} \cdot \overline{\varphi'(\bar{\sigma})} + \overline{\psi(\bar{\sigma})} &= f_1 + if_2; \\ \overline{\varphi(\bar{\sigma})} + \sigma^n \frac{m\sigma^{n+1} + 1}{\sigma^{n+1} - mn} \cdot \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) &= f_1 - if_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь учтена функция (2), преобразующая единичный круг плоскости ζ в исследуемую область плоскости z .

На контуре единичного круга $\zeta = e^{i\theta} = \sigma$. Функции f_1 и f_2 определяются заданными внешними напряжениями X_n и Y_n , действующими на контур отверстия, а именно:

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds. \quad (12)$$

* См. [8].

В случае неограниченной области с отверстием и при отсутствии напряжений на бесконечности функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ следует определять по формулам *

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta + \varphi_0(\zeta), \quad (13)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta + \psi_0(\zeta), \quad (14)$$

где

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f_1^0 + i f_2^0) d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad (15)$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\overline{f_1^0 + i f_2^0}) d\sigma}{\sigma - \zeta} - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} \cdot \varphi_0'(\zeta),$$

$$f_1^0 + i f_2^0 = f_1 + i f_2 + \frac{X+iY}{2\pi} \ln \sigma + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \cdot \frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}. \quad (16)$$

Выше приняты следующие обозначения:

X и Y — составляющие главного вектора внешних сил, действующих на контур отверстия,

$\kappa = 3-4\nu$ — в случае плоской деформации и

$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — в случае плоского напряженного состояния,

ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим подробнее случай эллиптического отверстия ** (рис. 3) с центром в точке $O(\xi_0, \eta_0)$.

Выберем новую систему координат xOy .

Отображающая функция (2) при $n=1$ упрощается и принимает вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right).$$

Напомним, что $z = x + iy = re^{i\vartheta}$ — комплексное переменное в области, занятой исследуемым телом, а ζ — комплексное переменное на плоскости $\zeta = x_1 + iy_1 = \rho e^{i\theta}$.

Уравнение эллипса будет

$$\frac{x^2}{R^2(1+m)^2} + \frac{y^2}{R^2(1-m)^2} = 1 \quad (17)$$

или в параметрической форме:

$$x = R(1+m) \cos \theta, \quad y = R(1-m) \sin \theta. \quad (18)$$

Обозначая через a_0 и b_0 большую и малую полуоси отверстия, имеем

$$R = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad m = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0}. \quad (19)$$

* См. [4].

** Следует иметь в виду, что верхняя часть пaterны плотины хорошо аппроксимируется эллипсом.

Запишем также следующие вспомогательные зависимости:

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= \frac{b_0^2 x}{\sqrt{a_0^4 y^2 + b_0^4 x^2}} = \frac{(1-m) \cos \theta}{\sqrt{1-2m \cos 2\theta + m^2}}; \\ \sin \vartheta &= \frac{a_0^2 y}{\sqrt{a_0^4 y^2 + b_0^4 x^2}} = \frac{(1+m) \sin \theta}{\sqrt{1-2m \cos 2\theta + m^2}}; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{1+m}{1-m} \operatorname{tg} \theta.\end{aligned}\quad (20)$$

Учитывая, что начало координат перенесено в точку $O(\xi_0, \eta_0)$, т. е., что

$$x = \xi - \xi_0; \quad y = \eta - \eta_0, \quad (21)$$

а также связь между напряжениями в криволинейных и декартовых координатах, получим следующие выражения для напряжений на контуре предполагаемого эллиптического отверстия от действия собственного веса:

$$\begin{aligned}\sigma_x^I &= \frac{2}{3} \gamma \xi_0 - \frac{2}{3} \gamma R (1+m) \cos \theta; \\ \sigma_y^I &= -\frac{\gamma}{6a}; \\ \tau_{xy}^I &= -\frac{1}{3} \gamma \eta_0 - \frac{1}{3} \gamma R (1-m) \sin \theta.\end{aligned}\quad (22)$$

Вектор напряжений $X_n + iY_n$ на контуре эллипса находим по формулам

$$X_n = \sigma_x^I \cos \vartheta + \tau_{xy}^I \sin \vartheta; \quad Y_n = \tau_{xy}^I \cos \vartheta + \sigma_y^I \sin \vartheta. \quad (23)$$

Используя выражения (20), получим

$$\begin{aligned}X_n &= \frac{\sigma_x^I (1-m) \cos \theta + \tau_{xy}^I (1+m) \sin \theta}{\sqrt{1-2m \cos 2\theta + m^2}}; \\ Y_n &= \frac{\tau_{xy}^I (1-m) \cos \theta + \sigma_y^I (1+m) \sin \theta}{\sqrt{1-2m \cos 2\theta + m^2}}.\end{aligned}\quad (24)$$

Найдем функцию $f_1 + if_2$, пользуясь формулами (24)

$$\begin{aligned}f_1 + if_2 &= i \int_0^s \left[\frac{\sigma_x^I (1-m) \cos \theta + \tau_{xy}^I (1+m) \sin \theta}{\sqrt{1-2m \cos 2\theta + m^2}} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\tau_{xy}^I (1-m) \cos \theta + \sigma_y^I (1+m) \sin \theta}{\sqrt{1-2m \cos 2\theta + m^2}} \right] ds.\end{aligned}\quad (25)$$

Преобразуем интеграл (25); для этого рассмотрим функцию, отображающую окружность на эллипс,

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right). \quad (26)$$

На контуре эллипса

$$ds = |dz| = R \left| 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right| |d\zeta| = R |\zeta^2 - m| d\theta = R |\zeta^2 - m| \left(-i \frac{d\sigma}{\sigma} \right), \quad (27)$$

где $\sigma = e^{i\theta}$.

Подставим значение ds в интеграл (25)

$$f_1 + if_2 = R \int \{ \sigma_x^I (1-m) \cos \theta + \tau_{xy}^I (1+m) \sin \theta + \\ + i [\tau_{xy}^I (1-m) \cos \theta + \sigma_y^I (1+m) \sin \theta] \} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (28)$$

Воспользовавшись, далее, формулами (22), получим

$$f_1 + if_2 = \frac{R\gamma}{3} \int \left\{ [-2\xi_0 - 2R(1+m) \cos \theta] (1-m) \cos \theta + \right. \\ \left. + [-\eta_0 - R(1-m) \sin \theta] (1+m) \sin \theta \right\} \frac{d\sigma}{\sigma} + \\ + i \frac{R\gamma}{3} \int \left\{ [-\eta_0 - R(1-m) \sin \theta] (1-m) \cos \theta - \frac{1+m}{2a} \sin \theta \right\} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (29)$$

После преобразований имеем

$$f_1 + if_2 = R \frac{\gamma}{3} \int \left\{ -2\xi_0 (1-m) \cos \theta - 2R(1-m^2) \cos^2 \theta - \right. \\ \left. - \eta_0 (1+m) \sin \theta - R(1-m^2) \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + i \left[-\eta_0 (1-m) \cos \theta - R(1-m^2) \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2a} (1+m) \sin \theta \right] \right\} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (30)$$

Даже, воспользовавшись вспомогательными соотношениями

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right); \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4i} \left(\sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right); \\ \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right); \quad \sin^2 \theta = -\frac{1}{4} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} - 2 \right); \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} + 2 \right); \quad \sigma = e^{i\theta}, \quad (31)$$

получаем

$$f_1 + if_2 = R \frac{\gamma}{3} \left\{ -\xi_0 (1-m) \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{R(1-m^2)}{2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} + 2 \ln \sigma \right) - \right. \\ \left. - \eta_0 (1+m) \frac{1}{2i} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{R(1-m^2)}{4} \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} - 2 \ln \sigma \right) + \right. \\ \left. + i \left[\frac{-\eta_0 (1-m)}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{R(1-m^2)}{4i} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2\sigma^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2a} (1+m) \frac{1}{2i} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \right] \right\} + C,$$

или

$$f_1 + if_2 = R \frac{\gamma}{3} \left\{ \sigma \left[-\xi_0 (1-m) - \frac{\eta_0 (1+m)}{2i} - \frac{i\eta_0 (1-m)}{2} - \frac{1+m}{4a} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma} \left[\xi_0 (1-m) - \frac{\eta_0 (1+m)}{2i} + \frac{i\eta_0 (1-m)}{2} - \frac{1}{4a} (1+m) \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma^2 \left[-\frac{R(1-m^2)}{4} + \frac{R(1-m^2)}{8} - \frac{R(1-m^2)^2}{8} \right] + \\
& + \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{R(1-m^2)}{4} - \frac{R}{8}(1-m^2) - \frac{R(1-m^2)}{8} \right] + \\
& + \ln \sigma \left[-R(1-m^2) - \frac{R(1-m^2)}{2} \right] + C.
\end{aligned}$$

Окончательно:

$$f_1 + if_2 = R \frac{\gamma}{3} \left\{ b' \sigma + c' \frac{1}{\sigma} + e' \sigma^2 + k' \frac{1}{\sigma^2} + A' \ln \sigma \right\} + C, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}
b &= R \frac{\gamma}{3} a' = \left[-\xi_0(1-m) - \frac{1+m}{4a} + \eta_0 m i \right] \frac{\gamma R}{3}; \\
c &= R \frac{\gamma}{3} c' = \left[\xi_0(1-m) - \frac{1+m}{4a} + \eta_0 i \right] \frac{\gamma R}{3}; \\
e &= R \frac{\gamma}{3} e' = -\frac{dR^2}{8} [1-m^2 - (1-m)^2] = \frac{\gamma R^2}{12} m(m-1); \\
k &= \frac{\gamma R}{3} k' = \frac{\gamma R^2}{8} [1-m^2 - (1-m)^2] = \frac{\gamma R^2}{12} m(1-m); \\
A &= R \frac{\gamma}{3} A' = -\frac{1}{2} \gamma R^2 (1-m^2).
\end{aligned} \quad (33)$$

Запишем функцию $f_1 + if_2$ в новых обозначениях

$$f_1 + if_2 = b\sigma + c \frac{1}{\sigma} + e\sigma^2 + k \frac{1}{\sigma^2} + A \ln \sigma + C. \quad (34)$$

Составим функцию *

$$f_1^0 + if_2^0 = -(f_1 + if_2) + A \ln \sigma + \frac{A}{(1+x)} \cdot \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \quad (35)$$

или

$$f_1^0 + if_2^0 = -b\sigma - c \frac{1}{\sigma} - e\sigma^2 - k \frac{1}{\sigma^2} + \frac{A}{1+x} \cdot \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2}. \quad (36)$$

Найдем, далее, главный вектор напряжений, возникающих на контуре предполагаемого эллиптического отверстия в параболическом клине (рис. 3) под влиянием собственного веса.

$$\begin{aligned}
X + iY &= -i[f_1 + if_2]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} = \oint (X_n + iY_n) ds; \\
X + iY &= -i(2\pi i A) = 2\pi A = -\pi \gamma R^2 (1-m^2); \\
X &= 2\pi A \text{ и } Y = 0.
\end{aligned} \quad (37)$$

* В правой части (35) перед $f_1 + if_2$ поставлен знак минус, так как для того, чтобы освободить контур отверстия от внешних напряжений, необходимо приложить к этому контуру усилия, определяемые формулами (34), но противоположно направленные.

Пользуясь формулами (15), найдем $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{c}{\zeta} - \frac{k}{\zeta^2},$$

$$\psi_0(\zeta) = \left[-\frac{b}{\zeta} - \frac{e}{\zeta^2} + \frac{A}{(1+\kappa)} \cdot \frac{1+\zeta^2 m}{\zeta^2 - m} - \frac{Am}{1+\kappa} \right] - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \left\{ \frac{c}{\zeta^2} + \frac{2k}{\zeta^3} \right\}. \quad (38)$$

Перепишем (38) в первоначальных обозначениях.

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \left[-\xi_0(1-m) + \frac{1+m}{4a} - i\eta_0 \right] \frac{\gamma R}{3} - \frac{\gamma R^2}{12} m(1-m) \frac{1}{\zeta^2};$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \left[\xi_0(1-m) + \frac{1+m}{4a} + i\eta_0 m \right] \frac{\gamma R}{3} + \frac{\gamma R^2}{12} m(1-m) \frac{1}{\zeta^2} -$$

$$- \frac{\gamma R^2(1-m^2)}{2(1+\kappa)} \cdot \frac{1+\zeta^2 m}{\zeta^2 - m} - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \left\{ \frac{c}{\zeta^2} + \frac{2k}{\zeta^3} \right\}. \quad (39)$$

Искомые функции φ и ψ на основании формул (13), (14), (38) и (39) можно записать в виде

$$\varphi(\zeta) = \frac{\gamma R^2(1-m^2)}{2(1+\kappa)} \ln \zeta + \frac{\gamma R}{3} \left[\xi_0(m-1) + \frac{m+1}{4a} - i\eta_0 \right] \frac{1}{\zeta} -$$

$$- \frac{\gamma R^2}{12} m(1-m) \frac{1}{\zeta^2}; \quad (40)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{\gamma R^2(1-m^2)\kappa}{2(1+\kappa)} \ln \zeta + \frac{\gamma R}{3} \left\{ \left[\xi_0(1-m) + \frac{m+1}{4a} + \right. \right.$$

$$\left. + i\eta_0 m \right] \cdot \frac{1}{\zeta} + \frac{(1-m)R}{4} \cdot \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3R(1-m^2)(1+m\zeta^2)}{2(1+\kappa)(\zeta^2 - m)} \left\} -$$

$$- \frac{\gamma R}{3} \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \left\{ \left[\xi_0(1-m) - \frac{1+m}{4a} + i\eta_0 \right] \cdot \frac{1}{\zeta^2} + \frac{m(1-m)R}{2} \cdot \frac{1}{\zeta^3} \right\}.$$

Вводя сокращенные обозначения

$$G = \frac{\gamma R^2(1-m^2)}{2(1+\kappa)}; \quad Q = -\frac{\gamma R}{3} \left[\xi_0(1-m) + \frac{1+m}{4a} \right];$$

$$H = \frac{\gamma R}{3} \left[\xi_0(1-m) - \frac{1+m}{4a} \right]; \quad S = \frac{\gamma R \eta_0}{3}, \quad (41)$$

$$T = \frac{m(1-m)\gamma R^2}{6};$$

получаем

$$\varphi(\zeta) = G \ln \zeta - (H + iS) \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2} T \frac{1}{\zeta^2};$$

$$\psi(\zeta) = -G\kappa \ln \zeta - (Q - imS) \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2m} T \frac{1}{\zeta^2} -$$

$$- \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \left[G + (H + iS) \frac{1}{\zeta} + T \frac{1}{\zeta^2} \right]. \quad (42)$$

Для определения напряжений в дополнительном состоянии обратимся к формулам Н. И. Мусхелишвили

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi}^{\Pi} + \sigma_{\theta}^{\Pi} &= 4Re[\Phi(\zeta)]; \\ \sigma_{\theta}^{\Pi} - \sigma_{\varphi}^{\Pi} + 2ir_{\theta}^{\Pi} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2\omega^2(\zeta)} \{\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\},\end{aligned}\quad (43)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; & \Psi(\zeta) &= \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \\ \omega(\zeta) &= R \frac{(\zeta^2 + m)}{\zeta}; & \omega'(\zeta) &= R \frac{(\zeta^2 - m)}{\zeta^2}.\end{aligned}$$

Дифференцируя (42), получим

$$\begin{aligned}\varphi'(\zeta) &= G \frac{1}{\zeta} + (H + iS) \frac{1}{\zeta^2} + T \frac{1}{\zeta^3} = \sum_{k=1,2,3} A_k \frac{1}{\zeta^k}; \\ \psi'(\zeta) &= -G\kappa \frac{1}{\zeta} + (Q - imS) \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{m} T \frac{1}{\zeta^3} + \\ &+ \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} \left[(H + iS) \frac{1}{\zeta^2} + 2T \frac{1}{\zeta^3} \right] + \frac{2(m^2+1)\zeta}{(\zeta^2-m)^2} \left[G + (H + iS) \frac{1}{\zeta} + T \frac{1}{\zeta^2} \right] = \\ &= \sum_{k=1,2,3} E_k \frac{1}{\zeta^k} + \frac{1}{\zeta^2-m} \cdot \sum_{k=0,1,2,3}' B_k \frac{1}{\zeta^k} + \frac{1}{(\zeta^2-m)^2} \sum_{k=-1,0,1} C_k \frac{1}{\zeta^k},\end{aligned}\quad (44)$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= G; & A_2 &= H + iS; & A_3 &= T; \\ E_1 &= -\kappa G; & E_2 &= Q - imS; & E_3 &= -\frac{T}{m}; \\ B_0 &= mH + iS; & B_1 &= 2mT; \\ B_2 &= H + iS; & B_3 &= 2T; \\ C_{-1} &= 2G(m^2+1); & C_0 &= 2(m^2+1)(H + iS); \\ C_1 &= 2(1+m^2)T.\end{aligned}\quad (45)$$

Форма представления $\varphi'(\zeta)$ и $\psi'(\zeta)$ в виде (44) оказалась весьма удобной в связи с дальнейшими довольно трудоемкими выкладками*. Так, комплексной комбинации (43) напряжений удалось придать компактную форму

$$\sigma_{\theta}^{\Pi} - \sigma_{\varphi}^{\Pi} + 2ir_{\theta}^{\Pi} = K_{\varphi} + K_{\psi}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned}K_{\varphi} &= 2\zeta \frac{\zeta^2+m}{\zeta^2-m} \left\{ -\frac{2\zeta^3\varphi'(\zeta)}{R(\zeta^2-m)^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\zeta^2-m} [\zeta^2\varphi'(\zeta)]' \right\} = \\ &= \frac{4}{R\Delta^2} \sum_{k=1}^3 A_k (m^2 \varrho^{4-k} e^{i(4-k)\theta} - \varrho^{8-k} e^{-ik\theta}) + \\ &+ \frac{2}{R\Delta} \sum_{k=1}^3 (2-k) A_k (\varrho^{4-k} e^{-ik\theta} + m \varrho^{2-k} e^{i(2-k)\theta});\end{aligned}\quad (47)$$

* Выкладки производили В. Я. Мигдзинский и П. А. Эренбург.

$$K_{\psi} = \frac{2\zeta^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \Psi(\zeta) =$$

$$= \frac{2\varrho^2}{R\Delta} \left\{ \sum_{k=1}^3 [\varrho^{-k} E_k (\varrho^2 e^{i(2-k)\theta} - m e^{-ik\theta}) + \varrho^{-k} B_k e^{-ik\theta}] + \right.$$

$$\left. + B_0 + \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-1,0,1} C_k \varrho^{-k} [\varrho^2 e^{-i(2+k)\theta} - m e^{-ik\theta}] \right\},$$

где

$$\Delta = m^2 - 2m\varrho^2 \cos 2\theta + \varrho^4. \quad (49)$$

4. Расчетные формулы для напряжений

На основании формул (43), (44), (46) и значений (42) функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ составлены формулы для напряжений в бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием L_1 (рис. 3), к контуру которого приложены внешние усилия, равные по величине, но противоположные по знаку напряжениям, возникающим в точках этого контура в параболическом клине от действия собственного веса.

К этим напряжениям следует добавить составляющие напряжений σ_{ϱ}^I , σ_{θ}^I и $\tau_{\varrho\theta}^I$, какие будут найдены из (22) на основании формул преобразования

$$\sigma_{\varrho}^I + \sigma_{\theta}^I = \sigma_x^I + \sigma_y^I;$$

$$\sigma_{\theta}^I - \sigma_{\varrho}^I + 2i\tau_{\varrho\theta}^I = (\sigma_y^I - \sigma_x^I + 2i\tau_{xy}^I) e^{2i\beta},$$

$$\text{где } e^{2i\beta} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\varrho^2 \overline{\omega'(\zeta)}}.$$

Опуская подробные выкладки, приводим окончательные расчетные формулы для напряжений в плоском параболическом клине с малым эллиптическим отверстием при действии собственного веса:

$$\sigma_{\theta} + \sigma_{\varrho} = -\frac{\gamma}{3} \left[\frac{1}{2\alpha} + 2\xi_0 + 2R \left(\varrho + \frac{m}{\varrho} \right) \cos \theta \right] +$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{\gamma}{\Delta} \left\{ -mH_0 + \left[G_0 \varrho (\varrho^2 - m) - \frac{m}{\varrho} T_0 \right] \cos \theta + \right.$$

$$\left. + H_0 \varrho^3 \cos 2\theta + T_0 \varrho \cos 3\theta + \varrho^2 \eta_0 \sin 2\theta \right\}; \quad (50)$$

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{\varrho} = \frac{2\gamma}{3\Delta} \varrho^2 \left\{ -mK_0 + R \left(\varrho^3 - 2m\varrho - \frac{2m^2}{\varrho} + \frac{m^3}{\varrho^3} \right) \cos \theta + \right.$$

$$+ \frac{K_0}{2} \left(\varrho^2 + \frac{m^2}{\varrho^2} \right) \cos 2\theta + mR \left(\varrho + \frac{m}{\varrho} \right) \cos 3\theta + \eta_0 \left(\varrho^2 - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) \sin 2\theta \left\} + \right.$$

$$+ \frac{2\gamma}{3\Delta} \left\{ (Q_0 + mH_0) \varrho^2 + \left[(1-\kappa) G_0 \varrho^3 + \left(2m - \frac{1}{m} \right) T_0 \varrho + \right. \right.$$

$$+ m(\kappa+1) G_0 \varrho - \frac{m}{\varrho} T_0 \left. \right] \cos \theta + (H_0 - mQ_0) \cos 2\theta + \left(\frac{3}{\varrho} - \varrho \right) T_0 \cos 3\theta +$$

$$+ \eta_0 (m^2 + 1) \sin 2\theta \left\} + \frac{4\gamma}{3\Delta^2} \left\{ -m(m^2 + 1) H_0 \varrho^2 + [m(m-1-m^2) T_0 \varrho - \right. \right.$$

$$- (m^2 + 1)(m - \varrho^2) G_0 \varrho^3 - G_0 \varrho^7] \cos \theta + H_0 \varrho^2 [m^2 + (m^2 + 1) \varrho^2 - \varrho^4] \cos 2\theta +$$

$$+ \varrho^3 [m^2 G_0 + (m^2 + 1) T_0 - T_0 \varrho^2] \cos 3\theta -$$

$$\left. - \eta_0 \varrho^2 [m^2 - (m^2 + 1) \varrho^2 + \varrho^4] \sin 2\theta \right\}; \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta\theta} = & \frac{\gamma \varrho^2}{3\Delta} \left\{ 2m\eta_0 + R \left(\varrho^3 + 2m\varrho - 2m^2 \frac{1}{\varrho} - \frac{m^3}{\varrho^3} \right) \sin \theta + \right. \\
& + \frac{K_0}{2} \left(\varrho^2 - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) \sin 2\theta + mR \left(\varrho - \frac{m}{\varrho} \right) \sin 3\theta - \eta_0 \left(\varrho^2 + \frac{m^2}{\varrho^2} \right) \cos 2\theta \Big\} + \\
& + \frac{\gamma}{3\Delta} \left\{ \left[- (1+\kappa) G_0 \varrho^3 - \left(2m - \frac{1}{m} \right) T_0 \varrho + m(1-\kappa) G_0 \varrho + mT_0 \right] \sin \theta - \right. \\
& - (H_0 - mQ_0) \sin 2\theta + \left(\varrho - \frac{3}{\varrho} \right) T_0 \sin 3\theta + \eta_0 (m^2 + 1) \cos 2\theta \Big\} + \quad (52) \\
& + \frac{2\gamma}{3\Delta^2} \left\{ -m(m^2 + 1) \eta_0 \varrho^2 + \varrho [m(m^2 + m + 1) T_0 - (m^2 + 1)(m + \varrho^2) G_0 \varrho^2 + \right. \\
& + G_0 \varrho^6] \sin \theta + H_0 \varrho^2 [m^2 - (m^2 + 1) \varrho^2 + \varrho^4] \sin 2\theta + \\
& + [m^2 G_0 - (m^2 + 1) T_0 + T_0 \varrho^2] \varrho^3 \sin 3\theta + \eta_0 \varrho^2 [m^2 - \varrho^4 + (m^2 + 1) \varrho^2] \cos 2\theta \Big\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= m^2 - 2m\varrho^2 \cos 2\theta + \varrho^4; & G_0 &= \frac{3(1-m^2)}{2(1+\kappa)} R; \\
K_0 &= 2\xi_0 - \frac{1}{2a}; & H_0 &= \xi_0(1-m) - \frac{1+m}{4a}; \quad (53) \\
T_0 &= \frac{m(1-m)}{2} R; & Q_0 &= \xi_0(m-1) - \frac{1+m}{4a}.
\end{aligned}$$

Положив в (50) и (51) $\varrho = 1$, получим формулу для напряжений на контуре эллиптического отверстия

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} = & \frac{\gamma}{3} \left\{ \left[-\frac{1}{2a} - 2\xi_0 - 2R(1+m) \cos \theta \right] + \right. \\
& + \frac{4}{\Delta_1} \left[-mH_0 + (G_0 - mG_0 - mT_0) \cos \theta + H_0 \cos 2\theta + T_0 \cos 3\theta + \eta_0 \sin 2\theta \right] \Big\}, \quad (54)
\end{aligned}$$

где $\Delta_1 = m^2 - 2m \cos 2\theta + 1$.

Найденное выше решение даст возможность легко получить формулы для напряжений в параболическом клине, ослабленном круговым отверстием радиуса R .

Положив в (50)–(52) $m = 0$, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varrho} = & \left\{ \left(\xi_0 + \frac{1}{4a} \right) \left[\left(\frac{R}{\varrho} \right)^2 - 1 \right] + \frac{1}{2} \left[-4 \frac{\varrho}{R} + \frac{9+3\kappa}{1+\kappa} \cdot \frac{R}{\varrho} - \frac{5-\kappa}{1-\kappa} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^3 \right] R \cos \theta + \right. \\
& + \left[\eta_0 \sin 2\theta - \left(\frac{1}{4a} - \xi_0 \right) \cos 2\theta \right] \left[-1 + 4 \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{\varrho} \right)^4 \right] \Big\} \frac{\gamma}{3}; \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} = & \left\{ - \left(\xi_0 + \frac{1}{4a} \right) \left[\left(\frac{R}{\varrho} \right)^2 + 1 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{3-3\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{R}{\varrho} + \frac{5-\kappa}{1+\kappa} \cdot \left(\frac{R}{\varrho} \right)^3 \right] R \cos \theta - \right. \\
& - \left[\left(\frac{1}{4a} - \xi_0 \right) \cos 2\theta - \eta_0 \sin 2\theta \right] \left[3 \left(\frac{R}{\varrho} \right)^4 + 1 \right] \Big\} \frac{\gamma}{3}; \quad (56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\varrho\theta} = & \left\{ \frac{1}{2} \left[2 \frac{\varrho}{R} + \frac{3-3\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{R}{\varrho} - \frac{5-\kappa}{1+\kappa} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^3 \right] R \cos \theta - \right. \\
& - \left[\left(\frac{1}{4a} - \xi_0 \right) \sin 2\theta + \eta_0 \cos 2\theta \right] \left[1 + 2 \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{\varrho} \right)^4 \right] \Big\} \frac{\gamma}{3}. \quad (57)
\end{aligned}$$

На контуре кругового отверстия ($\varrho = R$) окружные нормальные напряжения следует определять по формуле

$$(\sigma_\theta)_{\varrho=R} = \left\{ -\left(\xi_0 + \frac{1}{4a} \right) + \frac{2-\nu}{\nu+1} R \cos \theta + \right. \\ \left. + 2 \left[\left(\xi_0 - \frac{1}{4a} \right) \cos 2\theta + \eta_0 \sin 2\theta \right] \right\} \frac{\gamma}{3}. \quad (58)$$

Положив в (58) $\theta = \frac{\pi}{2}$, найдем максимальную величину напряжения σ_θ в точке пересечения горизонтальной оси с контуром отверстия

$$(\sigma_\theta)_{\max} = -\frac{2}{3} \xi_0 \gamma \left(3 - \frac{1}{4\xi_0 a} \right). \quad (59)$$

Окружное нормальное напряжение сплошного клина в той же точке ($\varrho = R$; $\theta = \frac{\pi}{2}$) получим из (56)

$$(\sigma_\theta)_0 = -\frac{2}{3} \xi_0 \gamma. \quad (60)$$

Следовательно, коэффициент концентрации напряжений в этой точке равен

$$\frac{(\sigma_\theta)_{\max}}{(\sigma_\theta)_0} = 3 - \frac{1}{4\xi_0 a}. \quad (61)$$

Он зависит от положения отверстия относительно вершины O (рис. 2) и от параметра a , входящего в уравнение (1) параболы, ограничивающей рассматриваемый клин.

Окружное нормальное напряжение на контуре круглого отверстия в точке с координатами $\varrho = R$, $\theta = 0$ равно

$$(\sigma_\theta)^0 = -\frac{\gamma}{6a} \left[3 - 4\xi_0 a - \frac{4(\nu-2)}{(\nu+1)} aR \right]; \quad (62)$$

для бетона при $\nu = \frac{1}{6}$ оно равно

$$(\sigma_\theta)^0 = -\frac{\gamma}{6a} [3 - 4a(\xi_0 + 0,1R)]. \quad (63)$$

Так как согласно (56) или (20) в сплошном клине в той же точке

$$\sigma_\theta = -\frac{\gamma}{6a}, \quad (64)$$

то коэффициент концентрации напряжений в этой точке равен

$$\frac{(\sigma_\theta)^0}{(\sigma_\theta)_0} = [3 - 4a(\xi_0 + 0,1R)]. \quad (65)$$

5. Пример расчета

Рассмотрим вариант плотины, имеющей профиль, показанный на рис. 1 пунктирной линией.

Сплошной линией нанесена парабола $\xi = 0,055\eta^2$, параметр $a = 0,055$ которой подобран так, чтобы получить наибольшее приближение к за-

данному профилю плотины в верхней его части. Радиус отверстия $R = 1,25$ м, координаты его центра (рис. 4) $\xi_0 = 7,5$ м; $\eta_0 = 0$; объемный вес бетона $\gamma = 2,4$ т/м³; коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{6}$.

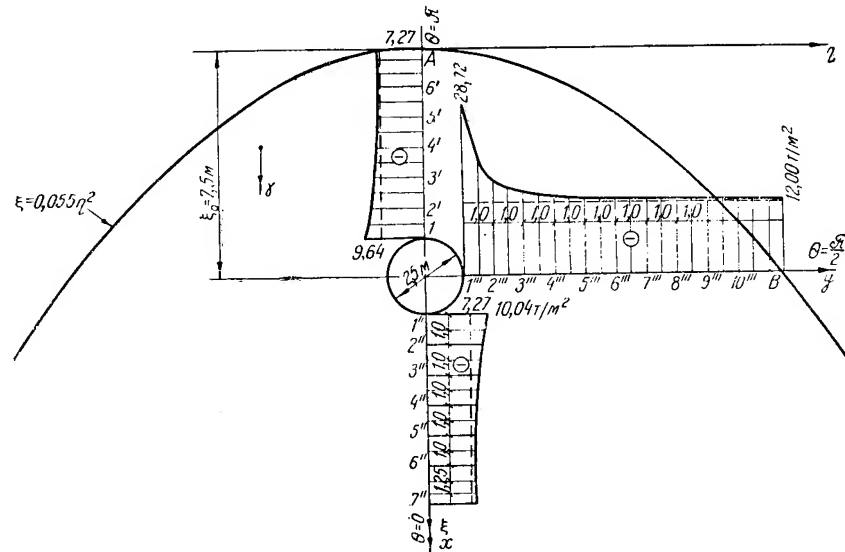


Рис. 4.

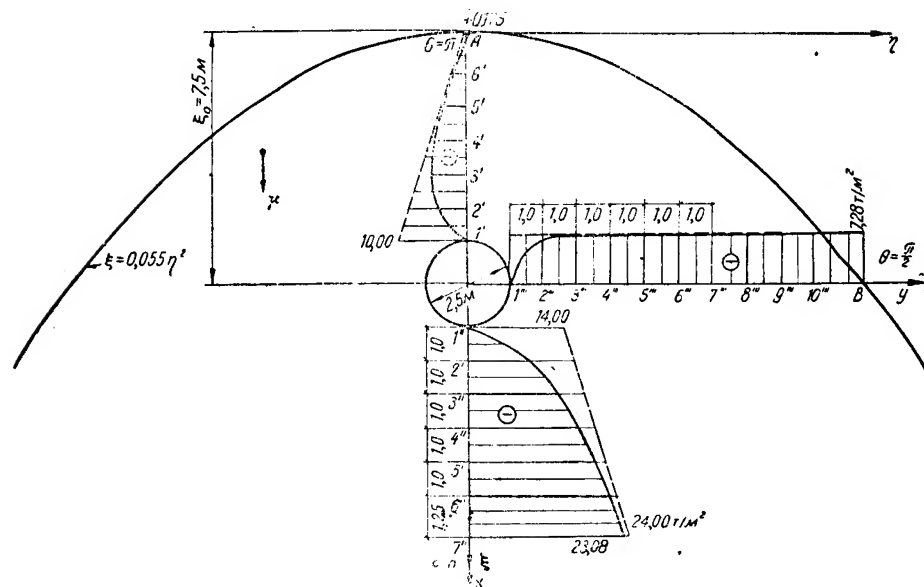


Рис. 5.

По формулам (10), (19) и (20) вычислены составляющие напряжений σ_ξ , σ_η и $\tau_{\xi\eta}$ в сечениях $\theta=0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta=\pi$ сплошного параболического клина. Они нанесены пунктирной линией на рис. 4, 5 и 6.

Напряжения в параболическом клине, ослабленном круговым отверстием радиуса $R = 1,25$ м определены по формулам (55) — (57). Кривые

напряжений σ_θ , σ_r и $\tau_{r\theta}$ нанесены на тех же фигурах сплошной линией. Ординаты кривых помещены в табл. 1, 2 и 3.

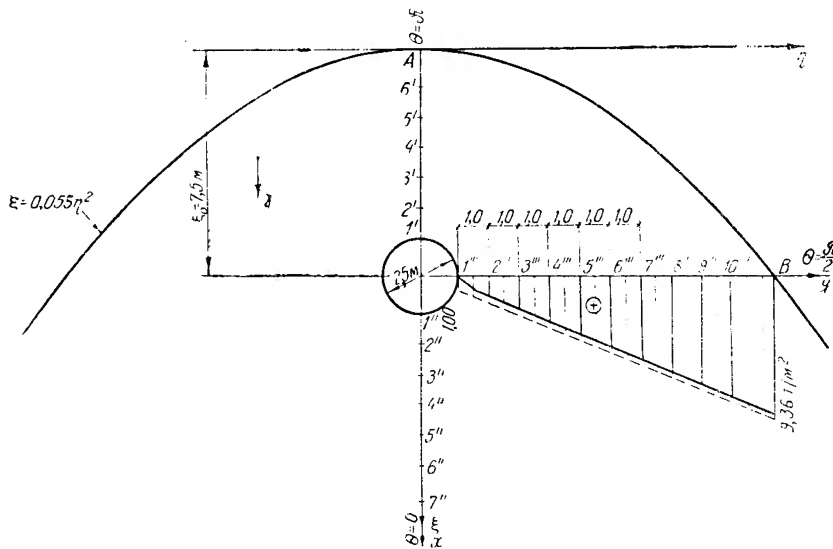


Рис 6.

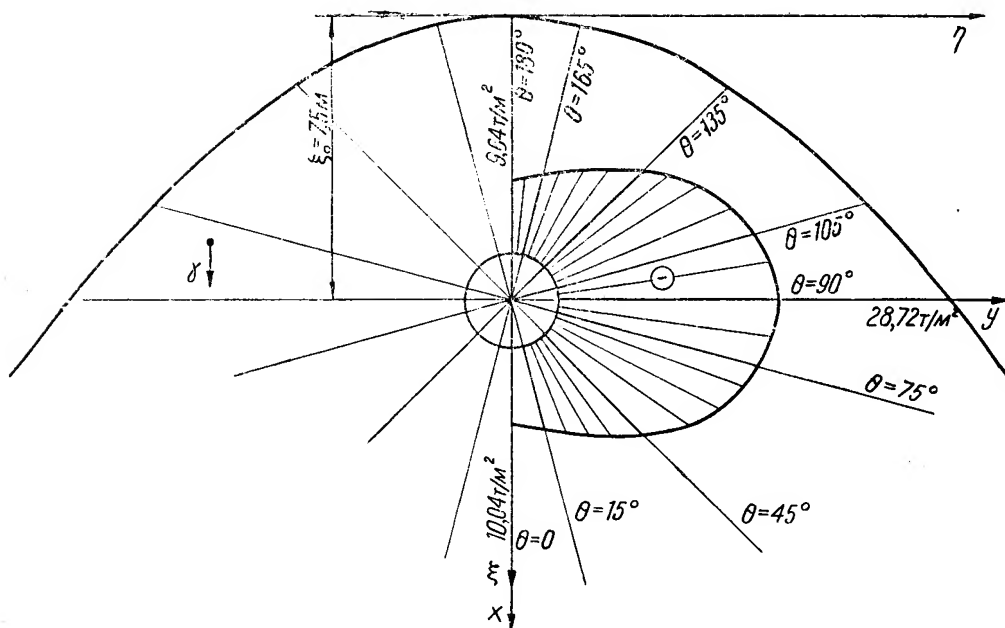


Рис. 7.

Окружные нормальные напряжения σ_θ на контуре отверстия $\varrho = R$ вычислены по формуле (58). Найденные величины помещены в табл. 4. Эпюра σ_θ в точках контура отверстия вычерчена на рис. 7.

Граничные условия на контуре плотины не вполне удовлетворяются. Так, в точке А (рис. 5) напряжения $\sigma_r = 0,14 \text{ м/м}^2$, а в точке В нормальные напряжения $\sigma_n = -0,8 \text{ м/м}^2$, а не равны нулю. Однако эти величины малы по сравнению с напряжениями в теле плотины вокруг отверстия.

Т а б л и ц а 1

Напряжения в сечении $\theta = 0$

Точки	ρ (м)	В сплошном клине			При наличии отверстия		
		σ_θ (т/м ²)	σ_ρ (т/м ²)	$\tau_{\rho\theta}$ (т/м ²)	σ_θ (т/м ²)	σ_ρ (т/м ²)	$\tau_{\rho\theta}$ (т/м ²)
1"	1,25	-7,272	-14,000	0,000	-10,040	0,000	0,000
2"	2,25	-7,272	-15,600	0,000	-9,856	-9,120	0,000
3"	3,25	-7,272	-17,200	0,000	-8,760	-13,632	0,000
4"	4,25	-7,272	-18,800	0,000	-8,224	-16,512	0,000
5"	5,25	-7,272	-20,40	0,000	-7,936	-18,784	0,000
6"	6,25	-7,272	-22,00	0,000	-7,776	-20,760	0,000
7"	7,50	-7,272	-24,00	0,000	-7,632	-23,080	0,000

Т а б л и ц а 2

Напряжения в сечении $\theta = \frac{\pi}{2}$

Точки	ρ (м)	В сплошном клине			При наличии отверстия		
		σ_θ (т/м ²)	σ_ρ (т/м ²)	$\tau_{\rho\theta}$ (т/м ²)	σ_θ (т/м ²)	σ_ρ (т/м ²)	$\tau_{\rho\theta}$ (т/м ²)
1"	1,25	-12,000	-7,28	1,000	-28,720	0,000	0,000
2"	2,25	-12,000	-7,28	1,800	-15,664	-6,552	1,487
3"	3,25	-12,000	-7,28	2,600	-13,584	-7,004	2,369
4"	4,25	-12,000	-7,28	3,400	-12,888	-7,216	3,214
5"	5,25	-12,000	-7,28	4,200	-12,626	-7,248	4,052
6"	6,25	-12,000	-7,28	5,000	-12,392	-7,264	4,877
7"	7,25	-12,000	-7,28	5,800	-12,048	-7,271	5,694
8"	8,25	-12,000	-7,28	6,600	-12,039	-7,276	6,508
9"	9,25	-12,000	-7,28	7,400	-12,028	-7,278	7,318
10"	10,25	-12,000	-7,28	8,200	-12,013	-7,279	8,128
B	11,70	-12,000	-7,28	9,366	-12,005	-7,286	9,310

Т а б л и ц а 3

Напряжения в сечении $\theta = \pi$

Точки	ρ (м)	В сплошном клине			При наличии отверстия		
		σ_θ (т/м ²)	σ_ρ (т/м ²)	$\tau_{\rho\theta}$ (т/м ²)	σ_θ (т/м ²)	σ_ρ (т/м ²)	$\tau_{\rho\theta}$ (т/м ²)
1	1,25	-7,272	-10,000	0,000	-9,640	0,000	0,000
2	2,25	-7,272	-8,400	0,000	-9,296	-4,432	0,000
3	3,25	-7,272	-6,800	0,000	-8,328	-5,000	0,000
4	4,25	-7,272	-5,200	0,000	-7,688	-4,528	0,000
5	5,25	-7,272	-3,600	0,000	-7,640	-3,120	0,000
6	6,25	-7,272	-2,000	0,000	-7,552	-1,720	0,000
A	7,5	-7,272	0,000	0,000	-7,448	-0,135	0,000

Таблица 4

Окружные нормальные напряжения на контуре отверстия

θ	0°	15°	45°	75°	90°	105°	135°	165°	180°
$\sigma_\theta (т/м^2)$	-10,04	-11,312	-19,424	-27,488	-28,72	-27,392	-19,136	-10,928	-9,64

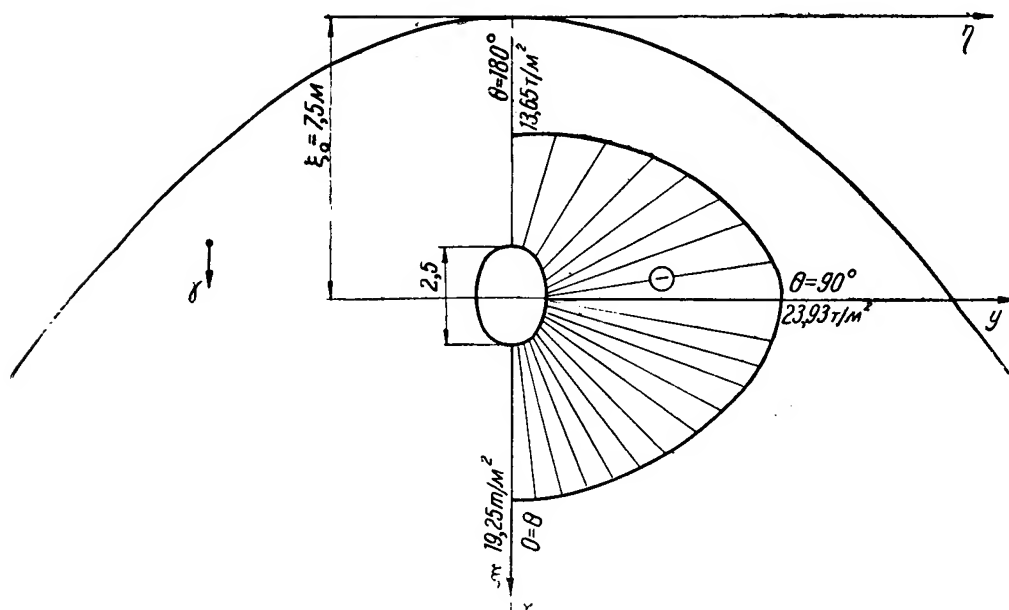


Рис. 8.

Рассмотрим случай эллиптического отверстия (рис. 8) с большой полуосью, равной

$$a_0 = \frac{2,5}{2} = 1,25 \text{ м},$$

и малой полуосью, равной

$$b_0 = \frac{2,0}{2} = 1,0 \text{ м}.$$

Такая форма отверстия хорошо аппроксимирует верхнюю свою часть контура патерны (рис. 1). Расположив центр отверстия в точке с координатами $\xi_0 = 7,5 \text{ м}$, $\eta_0 = 0$, определим по формуле (54) величины окружных напряжений на контуре эллиптического отверстия.

Результаты приведены на рис. 8, где даны величины найденных напряжений.

Анализируя полученные результаты, следует обратить внимание на одно существенное обстоятельство. В параболическом бесконечном клине, ослабленном круговым отверстием, от действия собственного веса не возникают растягивающие напряжения, опасные для сооружений из бетона. Это следует из того, что зона клина, окружающая отверстие, испытывает сжатие в двух направлениях (рис. 9).

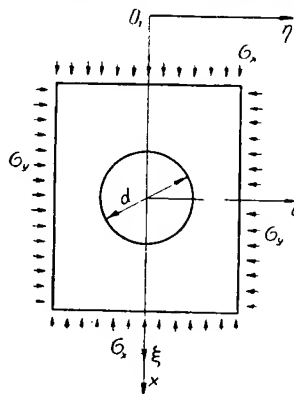


Рис. 9.

На это обстоятельство не обратили внимания авторы, занимавшиеся исследованием концентрации напряжений в треугольном клине с круговым отверстием, где аналогичное явление также имеет место при известных условиях.

В заключение заметим, что величины максимальных напряжений σ_0 на контуре отверстия в рассмотренной здесь задаче можно получить приближенно на основе метода, изложенного в другой работе автора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. П. Папкович, Теория упругости, Оборонгиз, 1939.
 2. Б. Г. Галеркин, К исследованию напряжений в плотинах и подпорных стенах трапециoidalного профиля, 1929.
 3. В. Л. Федоров, Влияние круглых отверстий на распределение напряжений в треугольных плотинах, Известия НИИГ, 20, 1937.
 4. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1949.
 5. Г. Н. Савин, Концентрация напряжений около отверстий, ГТТИ, 1951.
 6. Д. В. Вайнберг, Напряженное состояние составных дисков и пластин, изд. АН УССР, 1952.
 7. Г. С. Шапиро, Напряжения у отверстия в бесконечном клине. Труды Ленинградского политехнического института, 1941.
 8. Journal of Appl. Mech., June, 1949, v. 16, № 2, Stresses and Displacements in a Semi-Infinite Body with Parabolic Section.
-

примера, напряженное состояние, найденное таким образом, может существенно отличаться от определяемого системой уравнений (1) и (2).

В качестве примера рассмотрим напряженное состояние бесконечного клина (рис. 1), возникающее от действия собственного веса. Напряжения в бесконечном клине от действия собственного веса [1], удовлетворяющие системе уравнений (1) и (2), определяются так:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \rho g \left[y \frac{\cos \alpha \cos \beta \sin (\beta - \alpha)}{\sin^2 (\beta + \alpha)} - x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2 (\beta + \alpha)} \right) \right]; \\ \sigma_y &= - \frac{\rho g \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 (\beta + \alpha)} [y \sin (\beta - \alpha) + 2x \sin \alpha \sin \beta]; \\ \tau_{xy} &= - \frac{\rho g \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 (\beta + \alpha)} [2y \cos \alpha \cos \beta - x \sin (\beta - \alpha)].\end{aligned}\quad (3)$$

Когда α и β увеличиваются, стремясь к $\frac{\pi}{2}$ (случай больших углов, важный при расчете земляных плотин), напряжения σ_y и τ_{xy} быстро растут и в пределе обращаются в бесконечность, вместо того чтобы принять предельные значения, соответствующие напряжениям в тяжелой полуплоскости.

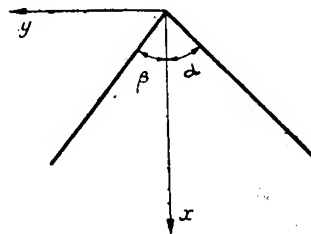


Рис. 1.

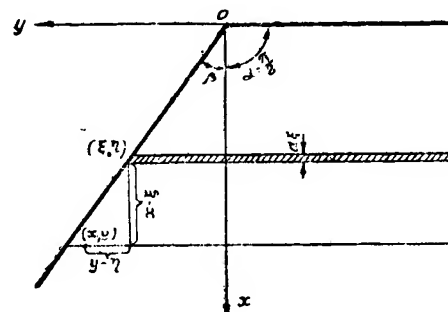


Рис. 2.

Для того чтобы численно сравнить напряжения, определенные из уравнений (1) и (2), с теми, которые получаются, если исключить влияние слоев, уложенных раньше данного, рассмотрим бесконечный клин с углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (рис. 2), возводимый бесконечно тонкими горизонтальными слоями.

Из уравнений (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\rho g x; \quad \sigma_y = \rho g \operatorname{tg} \beta (y - 2x \operatorname{tg} \beta); \\ \tau_{xy} &= -\rho g x \operatorname{tg} \beta.\end{aligned}\quad (4)$$

При выполнении расчета по предлагаемому методу следует действие каждого нового слоя заменить равномерной вертикальной нагрузкой и произвести интегрирование по всем вышележащим слоям при переменном профиле откоса. Если вдоль горизонтального ребра бесконечного клина с углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и вершиной в точке (ξ, η) приложена равномерно

распределенная нормальная нагрузка q , то возникающие в нем напряжения равны [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x-\xi, y-\eta) &= -\frac{q}{\operatorname{ctg} \beta + \beta + \frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{ctg} \beta + \beta - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y-\eta}{x-\xi} - \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right]; \\ \sigma_y(x-\xi, y-\eta) &= -\frac{q}{\operatorname{ctg} \beta + \beta + \frac{\pi}{2}} \left[\beta - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y-\eta}{x-\xi} + \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right]; \\ \tau_{xy}(x-\xi, y-\eta) &= -\frac{q}{\operatorname{ctg} \beta + \beta + \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Интегрированием по вышележащим слоям получаем напряжения в тяжелом клине с $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и вершиной в начале координат

$$\sigma_x^*(x, y) = qg \int_0^x \sigma_x(x-\xi, y-\xi \operatorname{tg} \beta) d\xi \quad (6)$$

и остальные аналогично. В результате интегрирования получается (здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \frac{qg}{\operatorname{ctg} \beta + \beta + \frac{\pi}{2}} \left\{ - \left[\beta(1 + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta) + \cos^2 \beta \operatorname{ctg} \beta + \frac{\pi}{2} \sin^2 \beta \right] x + \right. \\ &\quad + \sin \beta \cos \beta \left(2\beta \cos^2 \beta + \frac{\pi}{2} \right) y + 2 \cos^4 \beta (x \operatorname{tg} \beta - y) \ln \frac{x \operatorname{tg} \beta - y}{r} + \\ &\quad + \cos \beta (x \cos \beta + y \sin \beta) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \\ &\quad \left. - 2 \sin \beta \cos^3 \beta (x \operatorname{tg} \beta - y) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \cos \beta + y \sin \beta}{\cos \beta (x \operatorname{tg} \beta - y)} \right\};\end{aligned}\quad (7a)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^* &= \frac{qg}{\operatorname{ctg} \beta + \beta + \frac{\pi}{2}} \left\{ - \left[\beta(1 - 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta) + \sin \beta \cos \beta + \frac{\pi}{2} \sin^2 \beta \right] x - \right. \\ &\quad - \sin \beta \cos \beta \left(2\beta \cos^2 \beta - \frac{\pi}{2} \right) y + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta (x \operatorname{tg} \beta - y) \ln \frac{x \operatorname{tg} \beta - y}{r} + \\ &\quad + \cos \beta (x \cos \beta + y \sin \beta) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \\ &\quad \left. + 2 \sin \beta \cos^3 \beta (x \operatorname{tg} \beta - y) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \cos \beta + y \sin \beta}{\cos \beta (x \operatorname{tg} \beta - y)} \right\};\end{aligned}\quad (7b)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^* &= \frac{qg}{\operatorname{ctg} \beta + \beta + \frac{\pi}{2}} \left\{ -x \cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cos^3 \beta (x \operatorname{tg} \beta - y) \ln \frac{x \operatorname{tg} \beta - y}{r} + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \beta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) (x \operatorname{tg} \beta - y) \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \cos \beta + y \sin \beta}{\cos \beta (x \operatorname{tg} \beta - y)} + \beta \right] \right\}.\end{aligned}\quad (7b)$$

Уже качественное исследование заставляет предпочесть формулы (7) соотношениям (4). Действительно, напряжения, определяемые по фор-

мулам (7), всюду конечны на данной глубине x и переходят в формулы для тяжелой полуплоскости при $\beta = \frac{\pi}{2}$; при $y \rightarrow -\infty$ касательное напряжение τ_{xy}^* , определенное по формуле (7в), обращается в нуль.

Т а б л и ц а 1

β	$-\frac{\sigma_x^*}{\rho g x}$ по форм. (7а)	$-\frac{\sigma_x}{\rho g x}$ по форм. (4)	$-\frac{\sigma_y^*}{\rho g x}$ по форм. (7б)	$-\frac{\sigma_y}{\rho g x}$ по форм. (4)	$-\frac{\tau_{xy}^*}{\rho g x}$ по форм. (7в)	$-\frac{\tau_{xy}}{\rho g x}$ по форм. (4)
0°	1,000	1	0	0	0	0
5°	0,867	1	0,007	0,008	0,076	0,088
10°	0,741	1	0,023	0,031	0,131	0,176
15°	0,626	1	0,045	0,072	0,168	0,268
30°	0,340	1	0,113	0,333	0,196	0,577
45°	0,149	1	0,149	1,000	0,149	1,000
60°	0,045	1	0,136	3,000	0,078	1,732
75°	0,006	1	0,079	13,9	0,021	3,732
90°	0	1	0	∞	0	∞

В табл. 1 приведены выраженные в единицах $\rho g x$ напряжения на наклонной грани клина ($y = x \operatorname{tg} \beta$), вычисленные по формулам (4) и (7) при различных значениях угла β . Из таблицы видно, что напряжения, вычисленные по формулам (4), превышают по абсолютной величине напряжения, вычисленные по формулам (7), и чрезвычайно велики при больших β . Эти напряжения при возрастании угла β начинают все более и более отличаться друг от друга. Так, если при $\beta = 0$ напряже-

Т а б л и ц а 2

$\frac{y}{x}$	$-\frac{\sigma_x^*}{\rho g x}$ по форм. (7а)	$-\frac{\sigma_x}{\rho g x}$ по форм. (4)	$-\frac{\sigma_y^*}{\rho g x}$ по форм. (7б)	$-\frac{\sigma_y}{\rho g x}$ по форм. (4)	$-\frac{\tau_{xy}^*}{\rho g x}$ по форм. (7в)	$-\frac{\tau_{xy}}{\rho g x}$ по форм. (4)
1,732	0,045	1	0,136	3	0,078	1,7321
1,155	0,412	1	0,356	4	0,171	1,7321
0,577	0,701	1	0,463	5	0,173	1,7321
0	0,889	1	0,536	6	0,120	1,7321
- 0,577	0,966	1	0,603	7	0,064	1,7321
- 1,155	0,988	1	0,655	8	0,034	1,7321
- 2,309	0,997	1	0,714	10	0,013	1,7321
- 4,042	0,999	1	0,752	13	0,005	1,7321
- 5,774	1,000	1	0,770	16	0,003	1,7321
- 8,660	1,000	1	0,785	21	0,001	1,7321
- 14, 43	1,000	1	0,798	31	0,000	1,7321
$-\infty$	1	1	0,819	∞	0	1,7321

ния, вычисленные по формулам (4) и (7), совпадают между собой, то при $\beta = 30^\circ$ они отличаются примерно в 3 раза, при $\beta = 60^\circ$ — в 22 раза, а при $\beta = 75^\circ$ — в 175 раз.

В табл. 2 приведены выраженные в единицах $\rho g x$ величины напряжений в произвольном горизонтальном сечении клина при $\beta = 60^\circ$.

Эпюры $\frac{\sigma_x^*}{\rho g x}$, $\frac{\sigma_y^*}{\rho g x}$ и $\frac{\tau_{xy}^*}{\rho g x}$ в этом сечении, построенные по данным табл. 2, представлены на рис. 3. Для сравнения пунктиром нанесена эпюра $\frac{\sigma_x}{\rho g x}$; $\frac{\sigma_y}{\rho g x}$ и $\frac{\tau_{xy}}{\rho g x}$, значительно превышающие по величине $\frac{\sigma_x^*}{\rho g x}$ и $\frac{\tau_{xy}^*}{\rho g x}$, не могут быть изображены в масштабе рисунка.

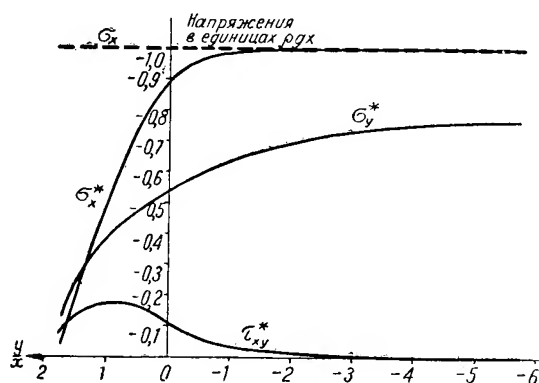


Рис. 3.

Как видно из рассмотренного примера, зависимость напряженного состояния от порядка возведения сооружения может быть весьма существенной и ею нельзя пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Галеркин, Сборник ЛИИПС, вып. 99, 1929.

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ КОРИОЛИСОВЫМИ СИЛАМИ

А. Д. Коваленко

Исследуется несимметричный изгиб круглой пластинки с жесткостью, изменяющейся по линейному закону, вызванный силами инерции при движении, называемом регулярной прецессией.

Рассмотрим движение круглой пластинки, вращающейся с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 вокруг оси z , перпендикулярной к срединной плоскости пластинки и проходящей через ее центр, причем эта

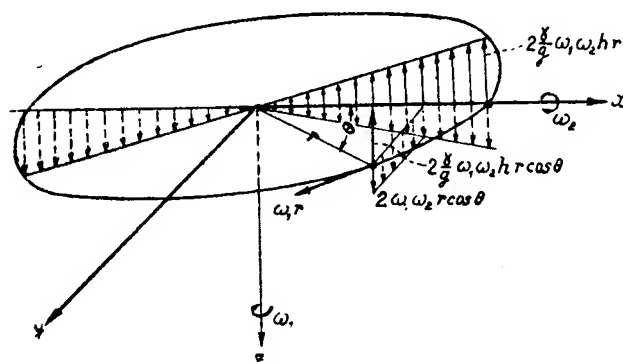


Рис. 1.

ось не остается неподвижной, а в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси x также с постоянной угловой скоростью ω_2 , составляя с ней неизменный угол 90° (рис. 1).

Силы инерции, возникающие при таком движении, вызывают несимметричное растяжение и несимметричный изгиб пластинки.

При $\omega_2 \ll \omega_1$ можно считать растяжение круглой пластинки симметричным и таким же, как при вращении вокруг одной только оси z .

В настоящей работе исследуется несимметричный изгиб круглой пластинки с жесткостью, изменяющейся по линейному закону; при этом влияние растяжения на изгиб не учитывается.

В исследовании применяются обозначения, введенные автором в статье [1], и используются полученные в ней некоторые результаты.

1. Основные уравнения

Рассмотрим линейный закон изменения цилиндрической жесткости круглой пластинки

$$D = D_0(1 - x), \quad (1.1)$$

где $x = \frac{r}{r_0}$ — относительный радиус пластинки,

r_0 — радиус пластинки при $D = 0$,

D_0 — жесткость в центре пластинки.

Этой жесткости соответствует толщина пластинки

$$h = h_0 (1 - x)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.2)$$

где h_0 — толщина в центре пластинки.

Заметим, что

$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

В относительном движении точка (r, θ) круглой пластинки, вращающейся вокруг оси z , имеет скорость $\omega_1 r$, проекция которой на ось y равна $\omega_1 r \cos \theta$ (рис. 1).

При прецессионном движении в точке (r, θ) возникает кориолисово ускорение, вектор которого параллелен оси z и по модулю равен $2\omega_1 \omega_2 r \cos \theta$.

Не учитывая сил инерции, возникающих при деформациях пластинки, считаем, что несимметричный изгиб пластинки вызывается только поперечной нагрузкой от кориолисовых сил с интенсивностью

$$q(r, \theta) = -2 \frac{\gamma}{g} \omega_1 \omega_2 r_0 h_0 x (1 - x)^{\frac{1}{3}} \cos \theta. \quad (1.3)$$

Тогда решение для прогиба можно выбрать в виде

$$w = w(x) \cos \theta. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в основное дифференциальное уравнение изгиба пластинки переменной толщины несимметричной нагрузкой [1], получим следующее неоднородное уравнение для $w(x)$:

$$\begin{aligned} x^4(1-x) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + x^3(2-4x) \frac{d^3 w(x)}{dx^3} - x^2[3+(-1+\nu)x] \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \\ + 3x \frac{dw(x)}{dx} - 3w(x) = -2 \frac{\gamma}{g} \omega_1 \omega_2 \frac{r_0^3 h_0}{D_0} x^5 (1-x)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (1.5), при $\alpha_0 = 1$ и $k = 1$ совпадает с уравнением (2.3) статьи [1].

Производя подстановку

$$w(x) = xy, \quad (1.6)$$

преобразуем уравнение четвертого порядка (1.5) к уравнению третьего порядка (относительно $\frac{dy}{dx}$)

$$\begin{aligned} x^3(1-x) \frac{d^4 y}{dx^4} + x^2(6-8x) \frac{d^3 y}{dx^3} + x[3-(11+\nu)x] \frac{d^2 y}{dx^2} - \\ - [3+2(-1+\nu)x] \frac{dy}{dx} = -2 \frac{\gamma}{g} \omega_1 \omega_2 \frac{r_0^3 h_0}{D_0} x^3 (1-x)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Производя вторую подстановку

$$\frac{dy}{dx} = xz, \quad (1.8)$$

преобразуем уравнение (1.7) к виду

$$\begin{aligned} x^2(1-x) \frac{d^3 z}{dx^3} + x(9-11x) \frac{d^2 z}{dx^2} + [15-(27+\nu)x] \frac{dz}{dx} - \\ - (9+3\nu)z = -2 \frac{\gamma}{g} \omega_1 \omega_2 \frac{r_0^3 h_0}{D_0} x(1-x)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Решение для прогиба

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (1.9), является гипергеометрическим уравнением третьего порядка

$$x^2(1-x)\frac{d^3z}{dx^3} + x[(B_1+1) - (A_1+3)x]\frac{d^2z}{dx^2} + [B_2 - (A_2+A_1+1)x]\frac{dz}{dx} - A_3z = 0. \quad (2.1)$$

Частные решения этого уравнения в случае, если разность каких-либо двух из трех величин $1, \beta_1, \beta_2$ не равна нулю или целому числу, имеют в окрестности точки $x=0$ следующий вид:

$$z^{(1)} = F(a_1, a_2, a_3; \beta_1, \beta_2; x), \quad (2.2)$$

$$z^{(2)} = x^{1-\beta_1} F(a_1+1-\beta_1, a_2+1-\beta_1, a_3+1-\beta_1; 2-\beta_1, \beta_2+1-\beta_1; x), \quad (2.3)$$

$$z^{(3)} = x^{1-\beta_2} F(a_1+1-\beta_2, a_2+1-\beta_2, a_3+1-\beta_2; 2-\beta_2, \beta_1+1-\beta_2; x). \quad (2.4)$$

В этих решениях параметры a_1, a_2, a_3 являются корнями уравнения

$$\alpha^3 - A_1\alpha^2 + A_2\alpha - A_3 = 0, \quad (2.5)$$

а параметры β_1, β_2 — корнями уравнения

$$\beta^2 - B_1\beta + B_2 = 0. \quad (2.6)$$

Функция вида $F(a_1, a_2, a_3; \beta_1, \beta_2; x)$ определяется следующим рядом:

$$F(a_1, a_2, a_3; \beta_1, \beta_2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_1]_n [a_2]_n [a_3]_n}{n! [\beta_1]_n [\beta_2]_n} x^n, \quad (2.7)$$

в котором

$$[a]_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1); [a]_0 = 1.$$

Ряд (2.7) сходится при $|x| < 1$. При $x=1$ этот ряд сходится, если $\beta_1 + \beta_2 - (a_1 + a_2 + a_3) > 0$.

Сопоставляя однородное уравнение, соответствующее (1.9), с уравнением (2.1), находим коэффициенты

$$A_1 = 8, A_2 = 18 + \nu, A_3 = 9 + 3\nu; \\ B_1 = 8, B_2 = 15.$$

Подставляя эти коэффициенты в уравнения (2.5) и (2.6), получаем

$$\alpha^3 - 8\alpha^2 + (18 + \nu)\alpha - 3(3 + \nu) = 0; \\ \beta^2 - 8\beta + 15 = 0.$$

Первое уравнение при коэффициенте Пуассона $\nu = \frac{1}{3}$ может быть представлено в виде уравнения $(\alpha - 3)(3\alpha^2 - 15\alpha + 10) = 0$, которое имеет корни

$$a_1 = 3, a_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{35}{3}}. \quad (2.8)$$

Второе уравнение имеет корни

$$\beta_1 = 3, \beta_2 = 5. \quad (2.9)$$

Тогда первое частное решение (2.2) однородного уравнения соответствующего уравнению (1.9), превращается в гипергеометрическую функцию второго порядка

$$z^{(1)} = F(3, a_2, a_3; 3, 5; x) = F(a_2, a_3; 5; x). \quad (2.10)$$

Однако решения в форме (2.3) и (2.4) при найденных значениях параметров (2.8) и (2.9) не имеют смысла. Искомые решения находим с помощью предельного перехода.

В (2.2) и (2.4) вместо $\beta_2 = 5$ подставляем $\beta_2 = 5 + \varepsilon$ и составляем линейную комбинацию двух частных решений

$$\frac{1}{\varepsilon} [F(a_2, a_3; 5 + \varepsilon; x) - f(\varepsilon) x^{-4-\varepsilon} F(a_2 - 4 - \varepsilon, a_3 - 4 - \varepsilon; -3 - \varepsilon; x)], \quad (2.11)$$

где

$$f(\varepsilon) = \frac{4!(-3-\varepsilon)(-2-\varepsilon)(-1-\varepsilon)(-\varepsilon)}{(a_2-4-\varepsilon)(a_2-3-\varepsilon)(a_2-2-\varepsilon)(a_2-1-\varepsilon)(a_3-4-\varepsilon)(a_3-3-\varepsilon)(a_3-2-\varepsilon)(a_3-1-\varepsilon)}.$$

Выражение (2.11) при $\varepsilon \rightarrow 0$ превращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Тогда в качестве второго частного решения однородного уравнения получаем

$$\begin{aligned} z^{(2)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [F(a_2, a_3; 5 + \varepsilon; x) - \right. \\ &\quad \left. - f(\varepsilon) x^{-4-\varepsilon} F(a_2 - 4 - \varepsilon, a_3 - 4 - \varepsilon; -3 - \varepsilon; x)] \right\} = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(a_2, a_3; 5 + \varepsilon; x) \right]_{\varepsilon=0} + \\ &\quad + x^{-4} \ln x [f(\varepsilon) F(a_2 - 4 - \varepsilon, a_3 - 4 - \varepsilon; -3 - \varepsilon; x)]_{\varepsilon=0} - \\ &\quad - x^{-4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(\varepsilon) F(a_2 - 4 - \varepsilon, a_3 - 4 - \varepsilon; -3 - \varepsilon; x)] \right\}_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Учитывая при вычислении $z^{(2)}$ тождество

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(\varepsilon) = F(\varepsilon) \frac{\partial \ln F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon},$$

находим

$$\begin{aligned} z^{(2)} &= \Phi(a_2, a_3; 5; x) = F(a_2, a_3; 5; x) \ln x - \\ &\quad - \frac{4! \cdot 3!}{(a_2-4)(a_2-3)(a_2-2)(a_2-1)(a_3-4)(a_3-3)(a_3-2)(a_3-1)} x^{-4} + \\ &\quad + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2!}{(a_2-3)(a_2-2)(a_2-1)(a_3-3)(a_3-2)(a_3-1)} x^{-3} - \\ &\quad - \frac{3 \cdot 4 \cdot 1!}{(a_2-2)(a_2-1)(a_3-2)(a_3-1)} x^{-2} + \frac{4}{(a_2-1)(a_3-1)} x^{-1} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_2(a_2+1) \dots (a_2+n-1) a_3(a_3+1) \dots (a_3+n-1)}{n! \cdot 5 \cdot 6 \dots (5+n-1)} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_2+n-1} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3+1} + \dots + \frac{1}{a_3+n-1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{5+n-1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right) x^n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя в (2.2) и (2.3) $\beta_1 = 3 + \varepsilon$ вместо $\beta_1 = 3$, составляем в качестве третьего частного решения однородного уравнения выражение

$$z^{(3)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [F(3, \alpha_2, \alpha_3; 3 + \varepsilon, 5; x) - f_1(\varepsilon) x^{-2-\varepsilon} F(1 - \varepsilon, \alpha_2 - 2 - \varepsilon, \alpha_3 - 2 - \varepsilon; -1 - \varepsilon, -3 - \varepsilon; x)] \right\}, \quad (2.14)$$

где

$$f_1(\varepsilon) = \frac{2! (-1 - \varepsilon) (-\varepsilon) (3 - \varepsilon) (4 - \varepsilon)}{(\alpha_2 - 2 - \varepsilon) (\alpha_2 - 1 - \varepsilon) (\alpha_3 - 2 - \varepsilon) (\alpha_3 - 1 - \varepsilon) (1 - \varepsilon) (2 - \varepsilon)}.$$

Производя аналогичные преобразования, находим

$$\begin{aligned} z^{(3)} &= \Phi(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + \\ &+ \frac{4! \cdot 3!}{(\alpha_2 - 4) (\alpha_2 - 3) (\alpha_2 - 2) (\alpha_2 - 1) (\alpha_3 - 4) (\alpha_3 - 3) (\alpha_3 - 2) (\alpha_3 - 1)} x^{-4} - \\ &- \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2!}{(\alpha_2 - 3) (\alpha_2 - 2) (\alpha_2 - 1) (\alpha_3 - 3) (\alpha_3 - 2) (\alpha_3 - 1)} x^{-3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким образом, однородное уравнение, соответствующее (1.9), имеет общее решение

$$\begin{aligned} z^* &= C_1 z^{(1)} + C_2 z^{(2)} + C_3 z^{(3)} = \\ &= C_1 F(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + C_2 \Phi(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + \\ &+ C_3 \left\{ \Phi(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + \right. \\ &+ \left. \frac{4! \cdot 2!}{(\alpha_2 - 3) (\alpha_2 - 2) (\alpha_2 - 1) (\alpha_3 - 3) (\alpha_3 - 2) (\alpha_3 - 1)} \left[\frac{3}{(\alpha_2 - 4) (\alpha_3 - 4)} x^{-4} - x^{-3} \right] \right\}, \end{aligned}$$

или

$$z^* = C_1 F(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + C_2 \Phi(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + C_3 \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{9}{2x} \right), \quad (2.16)$$

где

$$C_2 = C_2' + C_3',$$

$$C_3 = -C_3' \frac{4! \cdot 2!}{(\alpha_2 - 3) (\alpha_2 - 2) (\alpha_2 - 1) (\alpha_3 - 3) (\alpha_3 - 2) (\alpha_3 - 1)}.$$

Переходим теперь к определению частного решения неоднородного уравнения (1.9).

Разлагая в свободном члене бином $(1 - x)^{\frac{1}{3}}$ в ряд и полагая $\nu = \frac{1}{3}$, переписываем уравнение (1.9) в виде

$$\begin{aligned} x^2(1-x) \frac{d^3 z}{dx^3} + x(9-11x) \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(15 - \frac{82}{3} x \right) \frac{dz}{dx} - \\ - 10z = -cx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3} \right)_n x^n, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$c = 2 \frac{\gamma}{g} \omega_1 \omega_2 \frac{r_0^5 h_0}{D_0};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)_n = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \dots \left[\frac{1}{3} - (n-1)\right]}{n!};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)_0 = 1.$$

Ряд в свободном члене уравнения (2.17) сходящийся. Учитывая $m+1$ членов этого ряда, выбираем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$z^0 = \sum_{n=0}^m a_n x^n. \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.17) и собирая члены с одинаковыми степенями x , получаем следующую систему уравнений для определения коэффициентов a_n ($n = 0, 1, 2, \dots, m$):

$$\begin{aligned} 10a_0 - 15a_1 &= 0; \\ \left(10 + \frac{82}{3}\right)a_1 - 2(15+9)a_2 &= c; \\ \left(10 + \frac{82}{3} \cdot 2 + 11 \cdot 2\right)a_2 - 3(15+9 \cdot 2 + 2)a_3 &= -c \left(\frac{1}{3}\right)_1; \\ &\dots \dots \dots (2.19) \\ \left[10 + \frac{82}{3}n + 11n(n-1) + n(n-1)(n-2)\right]a_n - \\ - (n+1)[15+9n+n(n-1)]a_{n+1} &= (-1)^{n-1}c \left(\frac{1}{3}\right)_{n-1}; \\ &\dots \dots \dots \\ \left[10 + \frac{82}{3}m + 11m(m-1) + m(m-1)(m-2)\right]a_m &= (-1)^{m-1}c \left(\frac{1}{3}\right)_{m-1}. \end{aligned}$$

Общее решение неоднородного уравнения (1.9) при $\nu = \frac{1}{3}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z = z^* + z^0 &= C_1 F(a_2, a_3; 5; x) + C_2 \Phi(a_2, a_3; 5; x) + \\ &+ C_3 \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{9}{2x}\right) + \sum_{n=0}^m a_n x^n, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где коэффициенты a_n ($n = 0, 1, 2, \dots, m$) определяются из уравнений (2.19).

Принимая, далее, во внимание (1.4), (1.6) и (1.8), находим общее решение для прогиба w

$$w = \left\{ x \int x \left[C_1 F(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + C_2 \Phi(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_3 \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{9}{2x} \right) + \sum_{n=0}^m a_n x^n \right] dx + C_4 \right\} \cos \theta. \quad (2.21)$$

Используя при интегрировании гипергеометрических функций первого и второго рода формулы, приведенные в монографии [2], получаем общее решение для прогиба w в следующем виде:

$$w = C_1 w^{(1)} + C_2 w^{(2)} + C_3 w^{(3)} + C_4 w^{(4)} + w^0, \quad (2.22)$$

где

$$w^{(1)} = - \left[6x^2 F(\alpha_2 - 1, \alpha_3 - 1; 4; x) + \frac{27}{4} x F(\alpha_2 - 2, \alpha_3 - 2; 3; x) \right] \cos \theta; \\ w^{(2)} = - \left[6x^2 \Phi(\alpha_2 - 1, \alpha_3 - 1; 4; x) + \frac{27}{4} x \Phi(\alpha_2 - 2, \alpha_3 - 2; 3; x) + \right. \\ \left. + \frac{57}{2} x^2 F(\alpha_2 - 1, \alpha_3 - 1; 4; x) + \frac{1179}{32} x F(\alpha_2 - 2, \alpha_3 - 2; 3; x) \right] \cos \theta; \quad (2.23) \\ w^{(3)} = - \left(1 + \frac{9}{4x} \right) \cos \theta; \\ w^{(4)} = x \cos \theta; \\ w^0 = \sum_{n=0}^m \frac{a_n}{n+2} x^{n+2} \cos \theta.$$

3. Решения для изгибающих моментов, крутящих моментов и поперечных сил

Выражения (3.9) статьи [1] при жесткости (1.1) и $\nu = \frac{1}{3}$ принимают вид

$$M_r = - \frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta = - \frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_{r\theta} = M_{\theta r} = - \frac{2}{3} \frac{D_0}{r_0^2} \frac{1-x}{x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \\ Q_r = - \frac{D_0}{r_0^3} (1-x) \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{2}{x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \\ + \frac{D_0}{r_0^3} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ Q_\theta = - \frac{D_0}{r_0^3} \frac{1-x}{x} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \\ + \frac{2}{3} \frac{D_0}{r_0^3} \frac{1}{x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (3.1)$$

Подставляя (2.22) в (3.1), находим следующие решения для изгибающих моментов, крутящих моментов и поперечных сил:

$$M_r = C_1 M_r^{(1)} + C_2 M_r^{(2)} + C_3 M_r^{(3)} + C_4 M_r^{(4)} + M_r^0; \quad (3.2)$$

$$M_\theta = C_1 M_\theta^{(1)} + C_2 M_\theta^{(2)} + C_3 M_\theta^{(3)} + C_4 M_\theta^{(4)} + M_\theta^0; \quad (3.3)$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = C_1 M_{r\theta}^{(1)} + C_2 M_{r\theta}^{(2)} + C_3 M_{r\theta}^{(3)} + C_4 M_{r\theta}^{(4)} + M_{r\theta}^0; \quad (3.4)$$

$$Q_r = C_1 Q_r^{(1)} + C_2 Q_r^{(2)} + C_3 Q_r^{(3)} + C_4 Q_r^{(4)} + Q_r^0; \quad (3.5)$$

$$Q_\theta = C_1 Q_\theta^{(1)} + C_2 Q_\theta^{(2)} + C_3 Q_\theta^{(3)} + C_4 Q_\theta^{(4)} + Q_\theta^0, \quad (3.6)$$

где

$$M_r^{(1)} = -\frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \left[\frac{2}{3} x^2 F(a_2+1, a_3+1; 6; x) + \frac{10}{3} x F(a_2, a_3; 5; x) \right] \cos \theta;$$

$$M_r^{(2)} = -\frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \left[\frac{2}{3} x^2 \Phi(a_2+1, a_3+1; 6; x) + \frac{10}{3} x \Phi(a_2, a_3; 5; x) + \frac{13}{15} x^2 F(a_2+1, a_3+1; 6; x) \right] \cos \theta; \quad (3.7)$$

$$M_r^{(3)} = -\frac{D_0}{r_0^2} \frac{1-x}{x^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{x} \right) \cos \theta;$$

$$M_r^{(4)} = 0,$$

$$M_r^0 = -\frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{10}{3} \right) a_n x^{n+1} \cos \theta;$$

$$M_\theta^{(1)} = -\frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \left[\frac{2}{9} x^2 F(a_2+1, a_3+1; 6; x) + 2x F(a_2, a_3; 5; x) \right] \cos \theta;$$

$$M_\theta^{(2)} = -\frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \left[\frac{2}{9} x^2 \Phi(a_2+1, a_3+1; 6; x) + 2x \Phi(a_2, a_3; 5; x) + \frac{13}{45} x^2 F(a_2+1, a_3+1; 6; x) \right] \cos \theta; \quad (3.8)$$

$$M_\theta^{(3)} = -\frac{D_0}{r_0^2} \frac{1-x}{x^2} \left(1 + \frac{3}{x} \right) \cos \theta;$$

$$M_\theta^{(4)} = 0;$$

$$M_\theta^0 = -\frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \sum_{n=0}^m \left(\frac{n}{3} + 2 \right) a_n x^{n+1} \cos \theta;$$

$$M_{r\theta}^{(1)} = \frac{2}{3} \frac{D_0}{r_0^2} x (1-x) F(a_2, a_3; 5; x) \sin \theta;$$

$$M_{r\theta}^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{D_0}{r_0^2} (1-x) x \Phi(a_2, a_3; 5; x) \sin \theta;$$

$$M_{r\theta}^{(3)} = \frac{2}{3} \frac{D_0}{r_0^2} \frac{1-x}{x^2} \left(1 + \frac{9}{2x} \right) \sin \theta; \quad (3.9)$$

$$M_{r\theta}^{(4)} = 0;$$

$$M_{r\theta}^0 = \frac{2}{3} \frac{D_0}{r_0^2} (1-x) \sum_{n=0}^m a_n x^{n+1} \sin \theta;$$

$$\begin{aligned}
Q_r^{(1)} = & -\frac{D_0}{r_0^3} (1-x) \left[\frac{28}{27} x^2 F(\alpha_2+2, \alpha_3+2; 7; x) + \right. \\
& + \left(4 - \frac{2}{3} \frac{x}{1-x} \right) x F(\alpha_2+1, \alpha_3+1; 6; x) + \\
& + \left(4 - \frac{10}{3} \frac{x}{1-x} \right) F(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) \left. \right] \cos \theta; \\
Q_r^{(2)} = & -\frac{D_0}{r_0^3} (1-x) \left[\frac{28}{27} x^2 \Phi(\alpha_2+2, \alpha_3+2; 7; x) + \right. \\
& + \left(4 - \frac{2}{3} \frac{x}{1-x} \right) x \Phi(\alpha_2+1, \alpha_3+1; 6; x) + \\
& + \left(4 - \frac{10}{3} \frac{x}{1-x} \right) \Phi(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + \frac{791}{405} x^2 F(\alpha_2+2, \alpha_3+2; 7; x) + \\
& + \left(\frac{26}{5} - \frac{13}{15} \frac{x}{1-x} \right) x F(\alpha_2+1, \alpha_3+1; 6; x) \left. \right] \cos \theta; \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$Q_r^{(3)} = -\frac{D_0}{r_0^3} \frac{1}{x^2} \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{x} \right) \cos \theta;$$

$$Q_r^{(4)} = 0;$$

$$Q_r^0 = -\frac{D_0}{r_0^3} \sum_{n=0}^m \left\{ (n+1)(n+4) + \left[-(n+2)(n+4) + \frac{2}{3} \right] x \right\} a_n x^n \cos \theta;$$

$$\begin{aligned}
Q_\theta^{(1)} = & \frac{D_0}{r_0^3} (1-x) \left[\frac{2}{3} x F(\alpha_2+1, \alpha_3+1; 6; x) + \right. \\
& + \left(4 - \frac{2}{3} \frac{x}{1-x} \right) F(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) \left. \right] \sin \theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_\theta^{(2)} = & \frac{D_0}{r_0^3} (1-x) \left[\frac{2}{3} x \Phi(\alpha_2+1, \alpha_3+1; 6; x) + \right. \\
& + \left(4 - \frac{2}{3} \frac{x}{1-x} \right) \Phi(\alpha_2, \alpha_3; 5; x) + \\
& + \frac{13}{15} x F(\alpha_2+1, \alpha_3+1; 6; x) \left. \right] \sin \theta; \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$Q_\theta^{(3)} = -\frac{D_0}{r_0^3} \frac{1}{x^2} \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{x} \right) \sin \theta;$$

$$Q_\theta^{(4)} = 0;$$

$$Q_\theta^0 = \frac{D_0}{r_0^3} \sum_{n=0}^m \left[n+4 - \left(n + \frac{14}{3} \right) x \right] a_n x^n \sin \theta.$$

При вычислении частных решений (3.7)—(3.11) используем формулы дифференцирования и интегрирования гипергеометрических функций, приведенные в монографии [2].

В выражениях для частных решений однородных уравнений содержатся пять гипергеометрических функций первого рода $F(\alpha_2 - 2 + n,$

$a_3 - 2 + n; 3 + n; x)$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) и пять гипергеометрических функций второго рода $\Phi(a_2 - 2 + n, a_3 - 2 + n; 3 + n; x)$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$).

При составлении таблиц частных решений необходимо суммировать только ряды, определяющие гипергеометрические функции с $n = 0$ и $n = 1$. Остальные гипергеометрические функции ($n = 2, 3, 4$) могут быть вычислены с помощью рекуррентных формул

$$F(a, b; c; x) = \frac{c - (a + b + 1)x}{c} F(a + 1, b + 1; c + 1; x) + \frac{(a + 1)(b + 1)x(1 - x)}{c(c + 1)} F(a + 2, b + 2; c + 2; x); \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi(a, b; c; x) &= \frac{c - (a + b + 1)x}{c} \Phi(a + 1, b + 1; c + 1; x) + \\ &+ \frac{(a + 1)(b + 1)x(1 - x)}{c(c + 1)} \Phi(a + 2, b + 2; c + 2; x) + \\ &+ \frac{c - (a + b + 1)x}{c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) F(a + 1, b + 1; c + 1; x) + \\ &+ \frac{(a + 1)(b + 1)x(1 - x)}{c(c + 1)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b + 1} - \frac{1}{c} - \frac{1}{c + 1} \right) \times \\ &\times F(a + 2, b + 2; c + 2; x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Эти формулы получаются посредством подстановки в уравнение Гаусса

$$x(1 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c - (a + b + 1)x] \frac{dy}{dx} - aby = 0,$$

в котором параметр c равен целому положительному числу, его решений

$$y^{(1)} = F(a, b; c; x),$$

$$y^{(2)} = \Phi(a, b; c; x)$$

и первых двух производных от них, вычисляемых по формулам [2]

$$\frac{d}{dx} F(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1; c + 1; x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi(a, b; c; x) &= \frac{ab}{c} \left[\Phi(a + 1, b + 1; c + 1; x) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) F(a + 1, b + 1; c + 1; x) \right]. \end{aligned}$$

Общие решения (2.22) и (3.2) — (3.6) содержат четыре постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 , которые определяются из условий на наружном и внутреннем контурах пластинки.

4. Пример расчета

Стальной тонкий диск с размерами, указанными на рис. 2, совершает регулярную прецессию при взаимной перпендикулярности оси собственного вращения (ω_1) и оси прецессии (ω_2). Определить прогиб на наружном контуре диска, если его жесткость изменяется вдоль радиуса по линейному закону.

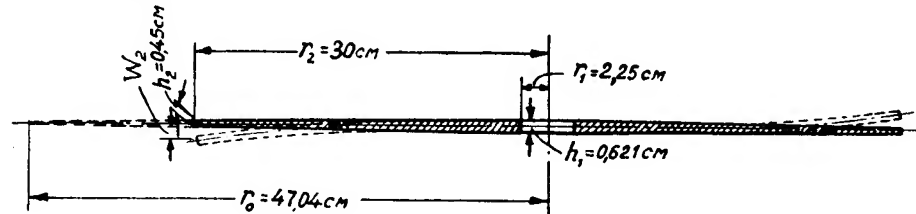


Рис. 2.

Внутренний контур диска свободно оперт, а наружный — свободен от сил и моментов.

Из соотношения

$$\frac{h_1^3}{h_2^3} = \frac{1 - \frac{r_1}{r_0}}{1 - \frac{r_2}{r_0}} = \frac{0,621^3}{0,45^3} = \frac{1 - \frac{2,25}{r_0}}{1 - \frac{30}{r_0}}$$

определяем радиус диска $r_0 = 47,04$ см, при котором его жесткость равна нулю.

При

$$x_1 = \frac{r_1}{r_0} = \frac{2,25}{47,04} \cong 0,05 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{r_2}{r_0} = \frac{30}{47,04} \cong 0,64$$

вычисляем значения гипергеометрических функций, входящих в частные решения (табл. 1).

Таблица 1

$F(a, b; c; x)$	$x=x_1=0,05$	$x=x_2=0,64$
$F(a_2-2, a_3-2; 3; x)$	0,955743	0,467395
$F(a_2-1, a_3-1; 4; x)$	0,991524	0,857500
$F(a_2, a_3; 5; x)$	1,03468	1,8937
$F(a_2+1, a_3+1; 6; x)$	1,08288	4,5772
$F(a_2+2, a_3+2; 7; x)$	1,13521	11,6043
$\Phi(a, b; c; x)$	$x=x_1=0,05$	$x=x_2=0,64$
$\Phi(a_2-2, a_3-2; 3; x)$	-467,788	- 3,40125
$\Phi(a_2-1, a_3-1; 4; x)$	-20612,9	- 13,0700
$\Phi(a_2, a_3; 5; x)$	-7373820	-336,572
$\Phi(a_2+1, a_3+1; 6; x)$	$882256 \cdot 10^3$	2915,12
$\Phi(a_2+2, a_3+2; 7; x)$	$-566184 \cdot 10^5$	-14174,7

Подставляя значения гипергеометрических функций в формулы (2.23), (3.7), (3.9) и (3.10), вычисляем затем при $x_1 = 0,05$ и $x_2 = 0,64$ частные решения для w , M_r , M_θ и Q_r (табл. 2).

Так как значение бинома $(1 - x_2)^{\frac{1}{2}} = (1 - 0,64)^{\frac{1}{2}} = 0,7114$ совпадает с точностью до четырех значащих цифр со значением полинома

$$\sum_{n=0}^{13} (-1)^n \left(\frac{1}{3} \right)^n x_2^n$$

в правой части уравнения (2.17), то при вычислении частных решений неоднородных уравнений принимаем во внимание не более 14 членов в рядах, входящих в эти решения.

Т а б л и ц а 2

x	$\frac{w^{(1)}}{\cos \theta}$	$\frac{w^{(2)}}{\cos \theta}$	$\frac{w^{(3)}}{\cos \theta}$	$\frac{w^{(4)}}{\cos \theta}$	$\frac{w^0}{c \cos \theta}$
0,05	-0,33744	465,24	-46,00	0,05	$0,188583 \cdot 10^{-5}$
0,64	-4,1265	25,783	-4,5156	0,64	0,00479767
	$\frac{M_r^{(1)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{M_r^{(2)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{M_r^{(3)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{M_r^{(4)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{M_r^0 r_0^2}{c D_0 \cos \theta}$
0,05	-0,16554	-229380	22673	0	-0,00487368
0,64	-1,9043	-28,666	3,8269	0	-0,00316930
	$\frac{M_{r\theta}^{(1)} r_0^2}{D_0 \sin \theta}$	$\frac{M_{r\theta}^{(2)} r_0^2}{D_0 \sin \theta}$	$\frac{M_{r\theta}^{(3)} r_0^2}{D_0 \sin \theta}$	$\frac{M_{r\theta}^{(4)} r_0^2}{D_0 \sin \theta}$	$\frac{M_{r\theta}^0 r_0^2}{c D_0 \sin \theta}$
0,64	+0,29087	-51,697	+4,7058	0	0,00604555
	$\frac{Q_r^{(1)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{Q_r^{(2)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{Q_r^{(3)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{Q_r^{(4)} r_0^2}{D_0 \cos \theta}$	$\frac{Q_r^0 r_0^2}{c D_0 \cos \theta}$
0,64	-3,4300	-36,4457	-7,8837	0	0,020887

Для определения постоянных интегрирования составляем четыре уравнения, удовлетворяющие следующим контурным условиям:

$$w = 0 \text{ и } M_r = 0 \text{ при } x = 0,05;$$

$$M_r = 0 \text{ и } Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = Q_r + \frac{1}{rx} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \text{ при } x = 0,64.$$

Используя табл. 2, получаем четыре уравнения

$$-0,33744C_1 + 465,24C_2 - 46,00C_3 + 0,05C_4 + 0,188583 \cdot 10^{-5}c = 0,$$

$$-0,16554C_1 - 229380C_2 + 22673C_3 - 0,00487368c = 0,$$

$$-1,9043C_1 - 28,666C_2 + 3,8269C_3 - 0,00316930c = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left(-3,4300 + \frac{0,29087}{0,64} \right) C_1 + \left(36,4457 - \frac{51,697}{0,64} \right) C_2 + \\ & + \left(-7,8837 + \frac{4,7058}{0,64} \right) C_3 + \left(0,020887 + \frac{0,00604555}{0,64} \right) c = 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$\begin{aligned} C_1 &= -0,0101998 \text{ c}; & C_3 &= 0,0123527 \text{ c}; \\ C_2 &= 0,00122097 \text{ c}; & C_4 &= -0,0652934 \text{ c}. \end{aligned}$$

Тогда прогиб диска на наружном контуре

$$\begin{aligned} w_2 &= C_1 w_2^{(1)} + C_2 w_2^{(2)} + C_3 w_2^{(3)} + C_4 w_2^{(4)} + w_2^* = \\ &= -0,0192c \cos \theta = -0,0384 \frac{\gamma}{g} \omega_1 \omega_2 \frac{r_0^5 h_0}{D_0} \cos \theta. \end{aligned}$$

Заключение

Найдены точные решения через гипергеометрические функции второго порядка для задачи о несимметричном изгибе круглой пластинки с жесткостью, изменяющейся по линейному закону, от кориолисовых сил возникающих при прецессионном ее движении.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Коваленко, О несимметричном изгибе круглых пластинок переменной толщины, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, № 15, 1951.
2. А. Д. Коваленко, Теория расчета на прочность колес турбомашин, изд. АН УССР, 1950.

Замена величин этих моментов через момент при косом изгибе и угол наклона внешней нагрузки к одной из главных осей дает возможность определить пластический момент сопротивления, а также величину предельной нагрузки стержня (балки). Полученные формулы, выраженные через элементы поперечного сечения и угол наклона внешней силы, достаточно просты.

Принимаем следующие предпосылки:

- а) пользуемся упрощенной диаграммой напряжений — деформаций с одинаковыми пределами текучести на растяжение и сжатие;
- б) влиянием касательных напряжений пренебрегаем;
- в) предельным состоянием профиля считаем распространение текучести по всему сечению.

Исследуем косой изгиб двутаврового и швеллерного профилей.

2. Косой изгиб двутаврового профиля

Приложим силу в центре изгиба двутавра под углом α к одной из главных осей, например к оси y (рис. 1,а). При этом стержень (балка) будет испытывать только косой изгиб.

На рис. 1,б и 1,в представлены эпюры нормальных напряжений в упругом состоянии от моментов M_x и M_y , действующих в главных плоскостях сечения. Знаком (+) обозначено сжатие.

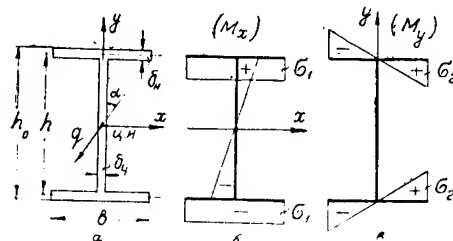


Рис. 1.

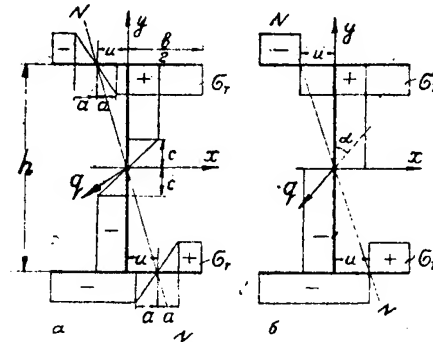


Рис. 2.

Учитывая распределение упругих напряжений и принятые выше предпосылки, находим эпюру напряжений в упруго-пластическом состоянии сечения, изображенную на рис. 2,а. При косом изгибе в профиле с двумя осями симметрии нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения как в упругом состоянии, так и при наличии текучести.

Вводим параметр u , обозначающий расстояние нулевой точки эпюры плоск до оси стенки. Через a и c обозначены протяжения половины упругого ядра в полках и в стенке.

На основании эпюры, изображенной на рис. 2,а, определим выражения для моментов M_x и M_y , пользуясь условиями равновесия.

Беря сумму моментов относительно оси x , получим

$$M_x = 2\sigma_T \left\{ -\delta_n \left(\frac{b}{2} - u - a \right) \frac{h}{2} + \delta_n (u - a) \frac{h}{2} + \delta_n \frac{b}{2} \frac{h}{2} + \right. \\ \left. + \delta_c \left(\frac{h}{2} - c \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - c \right) + c \right] \right\} = 2\sigma_T \delta_n h u + \sigma_T \delta_c \left(\frac{h^2}{4} - c^2 \right), \quad (2.1)$$

где σ_T — предел текучести при растяжении; высота стенки h принята между срединными линиями полков, как это принимается при рассмотрении тонкостенных профилей.

Аналогично сумма моментов относительно оси y равна

$$M_y = 2\sigma_r \left\{ -\delta_n \left(\frac{b}{2} - u - a \right) \left[-\left(\frac{\frac{b}{2} - u - a}{2} + u + a \right) \right] - \right. \\ \left. - \delta_n \frac{a}{2} \left[-\left(\frac{2}{3}a + u \right) \right] + \delta_n \frac{a}{2} \left[-\left(\frac{a}{3} + u - a \right) \right] + \delta_n (u - a) \left[-\frac{1}{2}(u - a) \right] + \right. \\ \left. + \delta_n \frac{b}{2} \frac{b}{4} \right\} = \sigma_r \delta_n \left(\frac{b^2}{2} - 2u^2 - \frac{2}{3}a^2 \right) \quad (2.2)$$

(плечи усилий относительно оси y считаются положительными справа от оси y).

Исключая из уравнений (2.1) и (2.2) параметр u , находим зависимость между изгибающими моментами в упруго-пластическом состоянии двутавра

$$\frac{1}{M_{r_{пол}}^2} (M_x - M_{r_{ст}} + \sigma_r \delta_c c^2)^2 + \frac{M_y}{M_{y_r}} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_r \delta_n a^2}{M_{y_r}} = 1. \quad (2.3)$$

Постоянные величины в формуле (2.3) имеют следующие выражения: предельный момент относительно оси y

$$M_{y_r} = \sigma_r \delta_n \frac{b^2}{2}; \quad (2.4)$$

предельный момент полки относительно оси x

$$M_{r_{пол}} = \sigma_r \delta_n b h; \quad (2.5)$$

то же для стенки

$$M_{r_{ст}} = \sigma_r \delta_c \frac{h^2}{4}. \quad (2.6)$$

При $a = c = 0$ получим формулу для предельного состояния сечения, соответствующую эпюре напряжений на рис. 2,б,

$$\frac{(M_x - M_{r_{ст}})^2}{M_{r_{пол}}^2} + \frac{M_y}{M_{y_r}} = 1. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) легко найти непосредственно по рис. 2,б, приравняв внутренние усилия внешним силам.

Выразим моменты M_x и M_y через внешний момент при косом изгибе и через угол наклона внешней силы с осью y

$$M_x = M \cos \alpha, \quad M_y = M \sin \alpha. \quad (2.8)$$

Подстановка выражений (2.8) в уравнение (2.7) дает квадратное уравнение относительно M

$$M^2 - 2M \frac{A}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} (M_{r_{ст}}^2 - M_{r_{пол}}^2) = 0,$$

откуда

$$M = \frac{1}{\cos \alpha} (A + \sqrt{A^2 - M_{r_{ст}}^2 + M_{r_{пол}}^2}), \quad (2.9)$$

где через A обозначено выражение

$$A = M_{r_{ст}} - \frac{M_{r_{пол}}^2}{2M_{y_r}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.9) можно определить величину предельной нагрузки, если выразить M через пролет и внешнюю нагрузку.

Поделив обе части равенства (2.9) на предел текучести σ_r и подставив $M_{гг}$ и $M_{пол}$ из (2.5) и (2.6), получим формулу пластического момента сопротивления сечения

$$\frac{M}{\sigma_r} = T = \frac{h^2}{4 \cos \alpha} \left[\delta_c - 4\delta_n \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{(\delta_c - 4\delta_n \operatorname{tg} \alpha)^2 - \delta_c^2 + \frac{16\delta_n^2 b^2}{h^2}} \right]. \quad (2.11)$$

Здесь h , b , δ_c и δ_n — размеры поперечного сечения, как указано на рис. 1,а.

При $\alpha = 90^\circ$ ($\cos \alpha = 0$; $\operatorname{tg} \alpha = \infty$), т. е. при изгибе в плоскости наименьшей жесткости, пластический момент сопротивления по формуле (2.11) становится неопределенным.

При $\alpha = 90^\circ$ на стенке двутавра эпюры напряжений не будет. В связи с этим полагаем выражение изгибающего момента стенки относительно оси x равным нулю и тогда находим

$$T = \frac{h^2 \sin \alpha}{4 \cos^2 \alpha} \left(-4\delta_n + \sqrt{16\delta_n^2 + \frac{16\delta_n^2 b^2}{h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) = 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 90^\circ. \quad (2.12)$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, окончательно получим

$$T = T_y = \frac{\delta_n b^2}{2}. \quad (2.13)$$

Пользуясь формулой (2.11), мы вычислили момент сопротивления для двутавра № 20 при изменении угла наклона силы от 0 до 90° , причем как толщина полок, так и толщина стенки принимались постоянными на всем протяжении.

Для сравнения посчитаны также величины упругих моментов сопротивления по формуле

$$W = \frac{W_x W_y}{W_x \sin \alpha + W_y \cos \alpha}, \quad (2.14)$$

где W_x и W_y — моменты сопротивления относительно главных осей находились из выражений:

$$W_x = \delta_n b h + \delta_c \frac{h^2}{6}, \quad W_y = \delta_n \frac{b^2}{3}. \quad (2.15)$$

Полученные результаты помещены в табл. 1 и нанесены на рис. 3.

Т а б л и ц а 1

α град.	T с.м.	W с.м.	$\frac{T}{W}$	$\frac{M_y}{M_{yг}}$	$\frac{M_x}{M_{xг}}$
0	253,2	232,1	1,09	0	1
5	214,4	144,7	1,48	0,374	0,841
10	181,5	105,6	1,72	0,632	0,707
15	154,0	83,7	1,84	0,797	0,588
30	98,7	53,3	1,85	0,987	0,338
45	70,3	41,2	1,70	0,994	0,197
60	56,0	35,5	1,58	0,995	0,111
75	51,5	32,2	1,55	0,995	0,053
90	50,0	33,3	1,50	1	0

Кривые на рис. 3 показывают, что упругий момент сопротивления двутавра резко падает при малых углах наклона (до 30°), а затем, при возрастании углов, переходит в плавную кривую, приближающуюся к оси x . Для пластического момента сопротивления это падение менее резко, хотя величина T при $\alpha = 90^\circ$ в пять раз меньше, чем при $\alpha = 0^\circ$.

Отношение $\frac{T}{W}$ наиболее велико для углов в промежутке $15-30^\circ$.

Таким образом, расчет по предельному состоянию приводит к наибольшей экономии именно для этих углов.

В табл. 1 приведены также отношения $\frac{M_y}{M_{yT}}$ и $\frac{M_x}{M_{xT}}$, которые дают предельную кривую, ограничивающую упруго-пластическую область (рис. 4). Аналогичные кривые для разных стадий упруго-пластического состояния можно найти по формуле (2.3), задаваясь определенными величинами a и c упругого ядра.

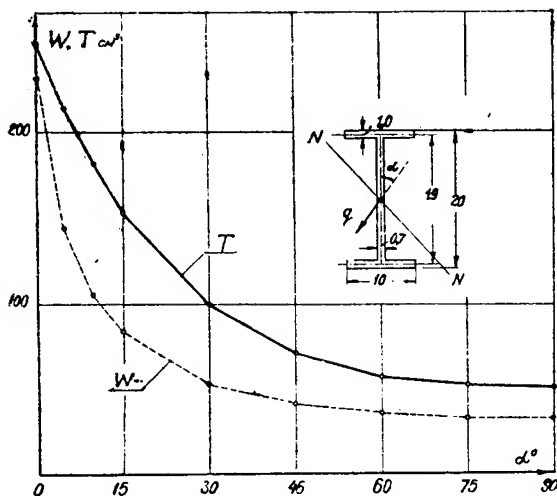


Рис. 3.

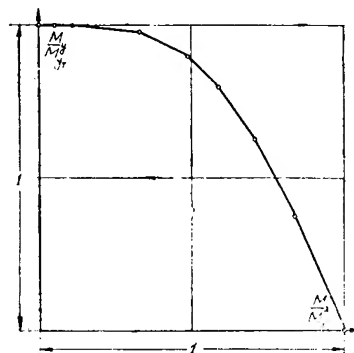


Рис. 4.

3. Швеллерный профиль при косом изгибе

Чистый косой изгиб швеллерного профиля осуществляется в том случае, когда сила приложена в центре изгиба швеллера (рис. 5, а). При этом нейтральная ось уже не проходит через центр тяжести сечения. В швеллере высоту стенки h принимаем от срединных линий полков, а ширину полки b от оси стенки; x_0 — расстояние центра тяжести сечения до срединной линии стенки.

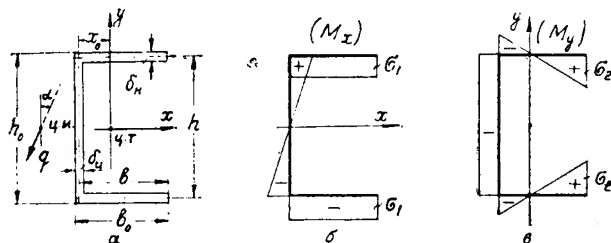


Рис. 5.

Аналогично предыдущему, рассмотрим упругие эпюры напряжений от моментов, действующих в главных плоскостях, как показано на рис. 5, б и 5, в. Суммарная эпюра этих напряжений будет иметь нулевые точки на стенке и нижней полке, если углы наклона внешней нагрузки

невелики, или только на полках, если углы α большие. Рассмотрим оба случая.

В первом случае, когда нейтральная ось пересекает стенку и одну из полок, т. е. когда преобладает вертикальная составляющая внешней силы, эпюра напряжений в упруго-пластическом состоянии имеет вид, изображенный на рис. 6,а.

Параметр v обозначает расстояние нулевой точки эпюры стенки до оси x , а параметр d — расстояние нулевой точки эпюры полки (нижней) до оси y . Протяжения половины упругого ядра в стенке и полке обозначены соответственно буквами c и a .

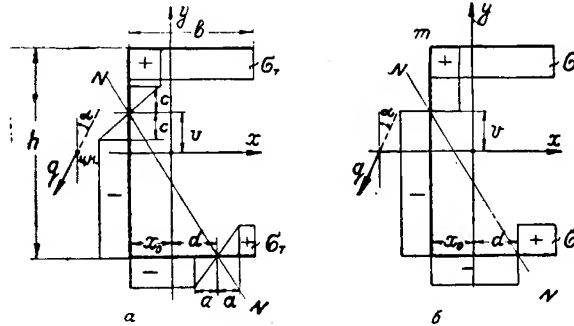


Рис. 6.

Запишем уравнения равновесия, исходя из эпюры напряжений на рис. 6,а.

Изгибающий момент относительно оси x равен

$$M_x = \sigma_T \delta_n h (x_0 + d) + \sigma_T \delta_c \left(\frac{h^2}{4} - v^2 - \frac{c^2}{3} \right); \quad (3.1)$$

изгибающий момент относительно оси y

$$M_y = \sigma_T \delta_n \left[(b - x_0)^2 - d^2 - \frac{a^2}{3} \right] + 2\sigma_T \delta_c x_0 v; \quad (3.2)$$

сумма проекций всех сил на ось z (продольную ось стержня) равна нулю

$$b - x_0 - d - \frac{\delta_c}{\delta_n} v = 0. \quad (3.3)$$

Подставляя в первые два уравнения значение d , определенное из (3.3), находим

$$\begin{aligned} M_x - M_{x_1} &= -\sigma_T \delta_c \left(\frac{c^2}{3} + hv + v^2 \right); \\ M_y &= -\sigma_T \delta_n \frac{a^2}{3} + \sigma_T \delta_c \left(2bv - \frac{\delta_c}{\delta_n} v^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где M_{x_1} представляет сумму величин (2.5) и (2.6).

Исключая v , получим зависимость между M_x и M_y в виде

$$\frac{M_x}{M_{x_1}} + \frac{\sigma_T F \delta_n}{M_{x_1} \delta_c} \left(b - \frac{M_y}{\sigma_T F} - \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3} - \frac{M_y}{\sigma_T \delta_n}} \right) + \frac{\sigma_T}{3M_{x_1}} \left(\delta_c c^2 - \frac{\delta_n^2}{\delta_c} a^2 \right) = 1. \quad (3.5)$$

Здесь F — площадь поперечного сечения равна

$$F = 2\delta_n b + \delta_c h. \quad (3.6)$$

Полагая $a = c = 0$, определим соотношение между действующими факторами в предельном состоянии швеллера, показанном на рис. 6,б.

$$\frac{M_x}{M_{x_r}} + \frac{\sigma_r F}{M_{x_r}} \frac{\delta_n}{\delta_c} \left(b - \frac{M_y}{\sigma_r F} - \sqrt{b^2 - \frac{M_y}{\sigma_r \delta_n}} \right) = 1. \quad (3.7)$$

После замены M_x и M_y их выражениями из формул (2.8) и соответствующих преобразований находим

$$M^2 - 2M\sigma_r \frac{G}{L} + \sigma_r^2 \frac{T_x}{L} \left(T_x \frac{\delta_c}{\delta_n} - 2Fb \right) = 0, \quad (3.8)$$

откуда пластический момент сопротивления для швеллера при косом изгибе

$$\frac{M}{\sigma_r} = T = \frac{G}{L} + \sqrt{\frac{G^2}{L^2} - \frac{T_x}{L} \left(T_x \frac{\delta_c}{\delta_n} - 2Fb \right)}. \quad (3.9)$$

Здесь G и L имеют следующие выражения

$$\begin{aligned} G &= - \left(T_x + F \frac{h}{2} \right) \sin \alpha + \left(T_x \frac{\delta_c}{\delta_n} - Fb \right) \cos \alpha; \\ L &= \frac{\delta_n}{\delta_c} \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\delta_c}{\delta_n} \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (3.10)$$

T_x — пластический момент сопротивления швеллера относительно оси x

$$T_x = \delta_n b h + \delta_c \frac{h^2}{4}. \quad (3.11)$$

Во втором случае, когда нейтральная ось пересекает обе полки, т. е. преобладает горизонтальная составляющая внешней силы, эпюра напря-

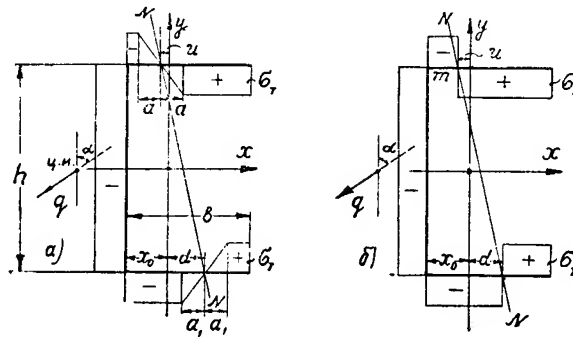


Рис. 7.

жений в упруго-пластическом состоянии сечения примет вид согласно рис. 7,а.

Ей соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} M_x &= \sigma_r \delta_n h (u + d); \\ M_y &= \sigma_r \delta_n \left[(b - x_0)^2 + x_0^2 - u^2 - d^2 - \frac{a^2}{3} - \frac{a_1^2}{3} \right] + \sigma_r \delta_c h x_0; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$b - 2x_0 + u - d - \frac{h}{2} \frac{\delta_c}{\delta_n} = 0.$$

Уравнения (3.12) дают такую зависимость между M_x и M_y :

$$\frac{1}{2M_{y_T}} \left(\frac{M_x^2}{\sigma_T \delta_n h^2} + \sigma_T \delta_n D^2 \right) + \frac{M_y}{M_{y_T}} + \frac{\sigma_T \delta_n}{3M_{y_T}} (a^2 + a_1^2) = 1. \quad (3.13)$$

Здесь

$$M_{y_T} = \sigma_T \delta_n [(b - x_0)^2 + x_0^2] + \sigma_T \delta_c h x_0; \quad (3.14)$$

$$D = b - 2x_0 - \frac{\delta_c h}{\delta_n 2}. \quad (3.15)$$

При распространении текучести по всему сечению швеллера, когда $a = a_1 = 0$, формула (3.13) приобретает вид

$$\frac{1}{2M_{y_T}} \left(\frac{M_x^2}{\sigma_T \delta_n h^2} + \sigma_T \delta_n D^2 \right) + \frac{M_y}{M_{y_T}} = 1. \quad (3.16)$$

Отметим, что зависимости (3.7) и (3.16) можно получить непосредственно из рассмотрения эпюр на рис. 6,б и рис. 7,б.

Выразив силовые факторы через момент M и угол α согласно (2.8) и решив квадратное уравнение относительно M , находим формулу для определения предельной нагрузки во втором случае

$$\frac{M}{\sigma_T} = T = \frac{\delta_n h}{\cos \alpha} \left(-h \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{2M_{y_T}}{\sigma_T \delta_n} - D^2} \right). \quad (3.17)$$

Для угла $\alpha = 90^\circ$ уравнение (3.17) приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, после раскрытия которой получим

$$T = T_y = \delta_n [(b - x_0)^2 + x_0^2] + \delta_c h x_0. \quad (3.18)$$

Как следует из третьего уравнения (3.12), $D = 0$ при $u = d = 0$, т. е. нейтральная ось совпадает с осью y .

Исследуем исходные системы уравнений (3.1) — (3.3) и (3.12) в предельном состоянии, когда $c = a = a_1 = 0$.

Для случая, когда нейтральная ось, пересекая нижнюю полку, пересечет сечение, например, в точке m (в месте соединения верхней полки со стенкой, рис. 6,б), обе системы уравнений приводятся к одной системе. Действительно, полагая $v = \frac{h}{2}$ в системе (3.1) — (3.3) или $u = x_0$ в системе (3.12), находим одни и те же выражения

$$\begin{aligned} M_x &= \sigma_T \delta_n h (x_0 + d); \\ M_y &= \sigma_T \delta_n [(b - x_0)^2 - d^2] + \sigma_T \delta_c h x_0; \quad b - x_0 - d - \frac{\delta_c h}{\delta_n 2} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Изложенное показывает, что обе системы уравнений справедливы для всякого положения нейтральной оси, что ниже подтвердится числовыми величинами.

Вычислим пластические моменты сопротивления по формулам (3.9) и (3.17) для швеллера (рис. 8), имеющего контур сечения (длину и толщину полосок) равновеликий с контуром ранее рассмотренного двутавра. Предварительно определим расстояние x_0 — центра тяжести

сечения до оси стенки, совмещающая вспомогательную ось y_1 со срединной линией стенки,

$$x_0 = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 0,35 \cdot 1 \cdot 0,175}{2 \cdot 10,35 \cdot 1 + 18 \cdot 0,7} = 3,0 \text{ см.} \quad (3.20)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

α град.	T (см ³) по формуле (3.9)	T (см ³) по формуле (3.17)	W см ³	$\frac{T}{W}$	$\frac{M_y}{M_{yT}}$	$\frac{M_x}{M_{xT}}$
0	253,2	260,0	232,1	1,09	0	1
10	207,7	208,3	132,1	1,57	0,373	0,808
15	189,8	188,0	109,8	1,72	0,512	0,732
30	146,6	145,0	75,3	1,95	0,756	0,501
45	120,3	119,6	60,4	1,99	0,877	0,336
60	103,8	103,7	53,5	1,94	0,927	0,205
75	97,6	97,6	51,1	1,91	0,972	0,100
90	97,0	97,9	52,3	1,87	1	0

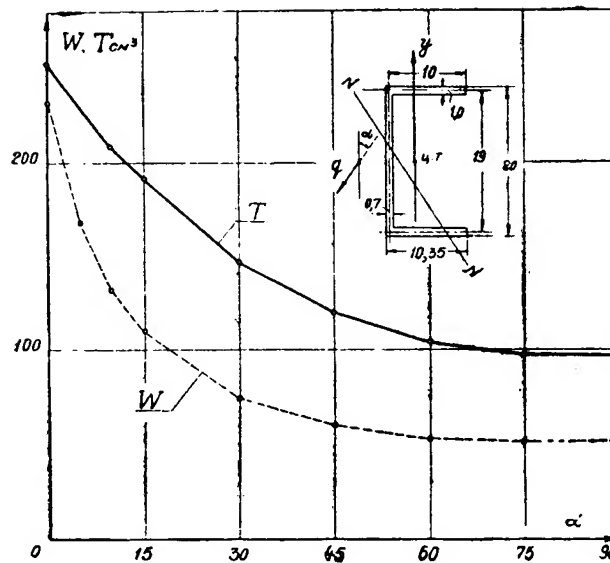


Рис. 8.

Несмотря на различные эпюры напряжений предельного состояния, соответствующие формулам (3.9) и (3.17), указанные формулы дают одинаковые моменты сопротивления (разница 1—2%) для всех углов наклона силы и, следовательно, применимы для любого положения нейтральной оси. Отличие заключается в том, что формула (3.9) выражена только через размеры поперечного сечения и угол α , формула же (3.17) включает кроме того x_0 — координату центра тяжести сечения до оси

стенки, входящую в величину D . Некоторое расхождение в числовых результатах мы объясняем неточностью вычислений. В дальнейшем для определения отношения $\frac{T}{W}$ использована зависимость (3.9).

Моменты сопротивления в упругом состоянии швеллера определены по формуле (2.14), где W_x и W_y найдены из выражений

$$W_x = \delta_n b h + \delta_c \frac{h^2}{6};$$

$$W_y = \frac{2}{3} \delta_n \left[(b-x_0)^2 + \frac{x_0^3}{b-x_0} \right] + \frac{\delta_c h x_0^2}{b-x_0} \quad (3.21)$$

(из двух моментов сопротивления швеллера относительно оси y взят меньший).

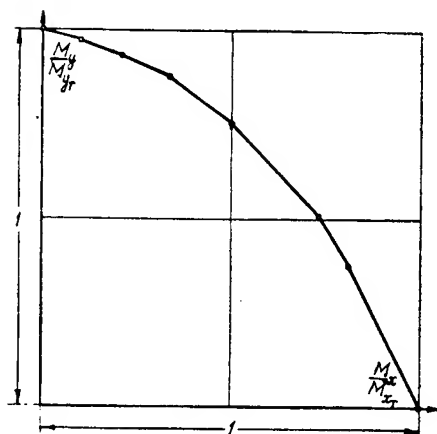


Рис. 9.

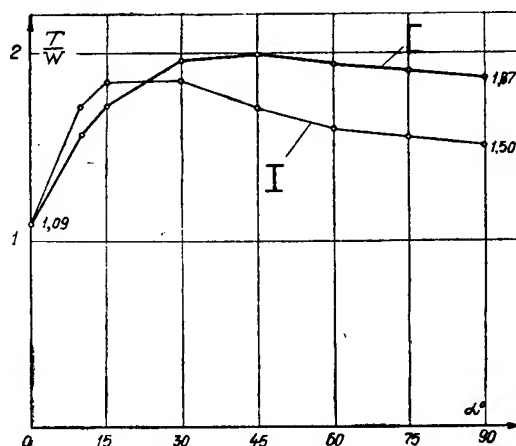


Рис. 10.

На рис. 8 показаны кривые изменения моментов сопротивления для швеллерного сечения в зависимости от угла наклона силы. Мы видим, что при косом изгибе моменты сопротивления швеллера значительно больше по величине, чем у двутавра, имеющего равновеликий контур. При $\alpha = 90^\circ$ упругий момент сопротивления в пять раз, а пластический в два с половиной раза меньше соответствующих величин при $\alpha = 0^\circ$.

Отношение $\frac{T}{W}$ наиболее велико для углов α от 30 до 60° , причем при $\alpha = 45^\circ$ оно достигает 2.

График отношений $\frac{M_x}{M_{xr}}$ и $\frac{M_y}{M_{yr}}$ изображен на рис. 9.

На рис. 10 для рассмотренных профилей представлено изменение отношений $\frac{T}{W}$ в зависимости от угла α . Как уже отмечалось, наибольшее отношение моментов сопротивления для двутавра наблюдается при малых углах наклона силы ($15-30^\circ$), для швеллера — при больших ($30-60^\circ$).

Сравнение показывает, что при косом изгибе швеллер с равновеликим двутавру контуром является в большинстве случаев более выгодным сечением, чем двутавр.

Заключение

Предлагаемый способ расчета металлических профилей при косом изгибе, основанный на рассмотрении эпюры напряжений при наличии текучести в сечении, дает простые расчетные формулы и удобен для применения.

Полученные результаты показывают, что применение расчета по предельному состоянию по сравнению с расчетом в пределах упругости приводит к значительной экономии металла, связанной как с геометрией поперечного сечения, так и с углом наклона внешней нагрузки.

Сопоставление двутаврового и швеллерного профилей позволяет сделать вывод, что расчет по предельному состоянию наиболее выгоден для двутавра при малых углах наклона внешней силы, а для швеллера — при больших.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Горбунов и В. Г. Чудновский, Расчет балок на косой изгиб при пластических деформациях, Сборник трудов Киевского строительного института, вып. II, 1935.
 2. Б. Н. Горбунов и С. А. Пальчевский, Расчет стальных балок на косой изгиб при пластических деформациях, „Строительная промышленность“, № 9, 1939.
 3. И. Н. Кудрявцев, Косой изгиб в области пластических деформаций, Изд. ВИА им. Куйбышева, Москва, 1940.
 4. А. Р. Ржаницын, Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Стройвоенмориздат, 1949.
-

КОЭФФИЦИЕНТ ПОДДЕРЖИВАЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ДЕРЕВЯННЫХ БАЛОК *

Ф. П. Белянкин

В статье рассматривается вопрос о теоретическом и экспериментальном определении величины коэффициента поддерживающего действия при изгибе балок.

Коэффициент поддерживающего действия определяется в функции от коэффициента внутреннего трения материала.

Предельная несущая способность деревянных балок при изгибе должна определяться не только с учетом образования пластических деформаций древесины, но и с учетом поддерживающего действия упруго напряженных волокон, которое они оказывают пластически деформированным волокнам изгибаемой балки.

Самое общее выражение для определения предельной несущей способности деревянных балок при изломе их изгибом, основанное на треугольно-трапециoidalной эпюре напряжений в предельном состоянии балки и при наличии поддерживающего действия, было предложено нами в 1933 г. в виде формулы

$$M_{\text{л}} = \xi \mu \Phi \sigma_{\text{сж}} W,$$

где $M_{\text{л}}$ — ломающий момент при изгибе деревянной балки;

ξ — коэффициент поддерживающего действия, учитывающий повышение несущей способности балки вследствие поддерживающего действия упруго напряженных волокон, которое они оказывают пластически деформированным волокнам;

μ — коэффициент, учитывающий повышение несущей способности балки при учете пластических деформаций древесины и являющийся известной функцией от $\eta = \frac{\sigma_{\text{р}}}{\sigma_{\text{сж}}}$ для каждой

формы поперечного сечения балки;

$\sigma_{\text{р}}$ — предел прочности древесины при растяжении;

$\sigma_{\text{сж}}$ — предел прочности древесины при сжатии вдоль волокон;

Φ — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения и являющийся известным отношением предельной несущей способности балки заданного сечения к предельной несущей способности балки сплошного прямоугольного сечения, описанного вокруг заданного сечения (для прямоугольного сечения коэффициент формы $\Phi = 1$);

W — момент сопротивления поперечного сечения изгибаемой балки.

* В работе принимала участие мл. научн. сотрудник Н. Н. Гуслистая.

На практике величину предела прочности деревянной балки при изгибе удобнее определять по формуле

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{M_{\text{л}}}{W} = \xi \mu \Phi \sigma_{\text{сж}},$$

как величину условного напряжения, отвечающего предельному состоянию балки, а величину предельной несущей способности балки при изгибе — по простой формуле

$$M_{\text{л}} = \sigma_{\text{и}} W.$$

Величина предела прочности при изгибе $\sigma_{\text{и}}$ может быть определена теоретически по найденным непосредственно из опыта величинам предела прочности при растяжении $\sigma_{\text{р}}$ и сжатии $\sigma_{\text{сж}}$ древесины вдоль волокон, так как величины ξ , μ и Φ являются известными функциями от $\eta = \frac{\sigma_{\text{р}}}{\sigma_{\text{сж}}}$ для каждой из заданных форм поперечного сечения балки.

Согласно результатам экспериментальных данных*, величина коэффициента поддерживающего действия для разных древесных пород в зависимости от коэффициента $\eta = \frac{\sigma_{\text{р}}}{\sigma_{\text{сж}}}$ колеблется в пределах 1,06—1,35, имея среднее значение 1,18.

Величина коэффициента поддерживающего действия, как показали наши опыты**, при данной форме поперечного сечения не зависит от размеров сечения.

При определении предельной несущей способности балок при изгибе поддерживающее действие, оказываемое пластически деформированным волокнам со стороны упруго напряженных волокон, обычно, по литературным данным, не принимается во внимание ввиду того, что экспериментальные результаты якобы не подтверждают наличия такого эффекта поддерживающего действия.

Пренебрегая величиной коэффициента поддерживающего действия, мы снижаем определенную по формуле величину несущей способности балки при изгибе в среднем на 18%, с колебанием от 6 до 35% для разных древесных пород.

Обычное испытание древесины на изгиб по схеме балки, свободно лежащей на двух опорах, с одним сосредоточенным грузом, приложенным по середине пролета, или с двумя равными сосредоточенными грузами, расположенными симметрично по обе стороны от середины пролета, вызывает значительное смятие древесины поперек волокон как на опорах, так и в местах приложения нагрузки под нагрузочными пуансонами; это смятие тем больше, чем мягче древесина.

Смятие древесины под нагрузочными пуансонами вызывает значительное ослабление сечения в местах приложения нагрузки, что в свою очередь ведет обычно к излому образца по этим сечениям и к значительному снижению показателей прочности древесины при испытании на излом при изгибе.

Увеличение радиуса закрутления нагрузочных пуансонов, применение разных твердых или мягких прокладок под нагрузочными пуансонами не исключает вредного эффекта смятия древесины поперек ее волокон.

Для исключения вредного влияния смятия древесины в рабочей части образца нами был предложен образец с опорно-нагрузочными головками***, средняя рабочая часть которого находится в условиях

* Ф. П. Белянкин, Пластичні деформації і підтримуюча дія при згині дерев'яних балок, вид. АН УРСР, 1936, стр. 56.

** Ф. П. Белянкин, Дослідження міцності дерев'яних балок, вид. АН УРСР, 1938.

*** Там же, стр. 8—13.

чистого изгиба и древесина не подвергается в этой части длины образца смятию поперек волокон.

Испытание на изгиб, проведенное на 14 древесных породах, показало, что предел прочности при изгибе, полученный при испытании образцов с опорно-нагрузочными головками на 8,5—34,0%, а в среднем на 19% выше, чем для образцов без головок.

Как показывает сравнение среднего и граничных значений коэффициента поддерживающего действия, полученных из опыта, со средним и граничными значениями снижения предела прочности древесины при испытании на образцах без головок, величины эти почти полностью совпадают.

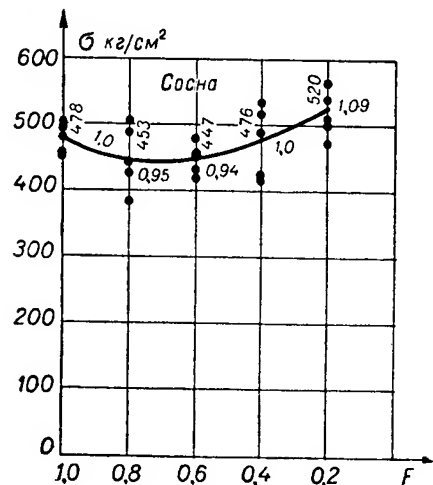


Рис. 1.

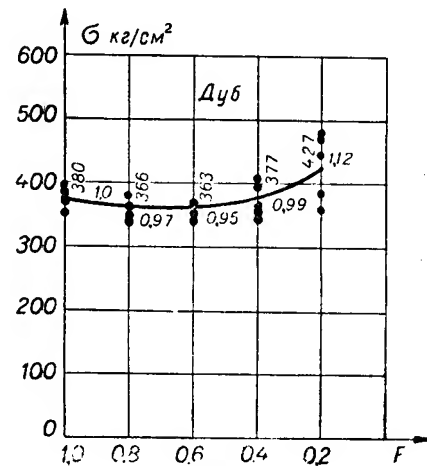


Рис. 2.

Ясно, что обычное нормированное испытание образцов древесины на изгиб, при котором не исключено вредное влияние смятия древесины поперек волокон, не могло обнаружить эффект поддерживающего действия, давая значительно пониженные показатели прочности древесины при изгибе.

Для изучения эффекта поддерживающего действия произведено испытание деревянных образцов формы куба размером $5 \times 5 \times 5$ см. Одна серия испытаний проведена на образцах сосны, другая серия на образцах дуба. Каждая серия образцов разбита на пять групп, по пять образцов в каждой группе. Первая группа, состоящая из пяти образцов, испытывалась на сжатие вдоль волокон древесины по полной площади поперечного сечения образца, а остальные группы испытывались при помощи двух зажимных плиток по части площади, составляющей 0,8; 0,6; 0,4 и 0,2 от полной площади поперечного сечения образца. Предел прочности древесины определяется условно как частное от деления разрушающего груза на нагруженную часть площади поперечного сечения образца.

Результаты испытаний для всех образцов и средние значения предела прочности древесины представлены на графиках (рис. 1 — для сосны и рис. 2 — для дуба). Как видно из графика, с уменьшением нагруженной части поперечного сечения образца предел прочности древесины сначала падает, достигает минимума, а затем начинает расти.

Характер изменения предела прочности является результатом действия двух факторов. Первым из этих факторов является концентрация напряжений, имеющая место у ребер нажимных плиток. Величина коэффициента концентрации изменяется незначительно, увеличиваясь с уменьшением длины нажимных плиток, т. е. с уменьшением нагруженной

части площади поперечного сечения образца. Концентрация напряжений ведёт к снижению предела прочности древесины.

Вторым фактором, влияющим на характер изменения предела прочности, является поддерживающее действие ненагруженной части объема образца, которое она оказывает нагруженной части объема образца, что, естественно, ведет к повышению величины предела прочности древесины. Чем меньше нагруженная часть объема образца, тем больше его ненагруженная часть и тем больше поддерживающее действие этого большого объема.

При большой площади нагруженной части поперечного сечения образца поддерживающее действие малого ненагруженного объема образца невелико и превалирующее значение имеет концентрация напряжений, что ведет к снижению предела прочности древесины. Это снижение предела прочности древесины образца, сжатого по части площади поперечного сечения, в сравнении с пределом прочности древесины, полученным на образце, сжатом по всей площади его поперечного сечения, показано на левой части кривой (рис. 1 и 2). Градиент падения левой части кривой все более и более уменьшается с возрастанием ненагруженного объема образца, что объясняется увеличением поддерживающего действия, оказываемого этим объемом.

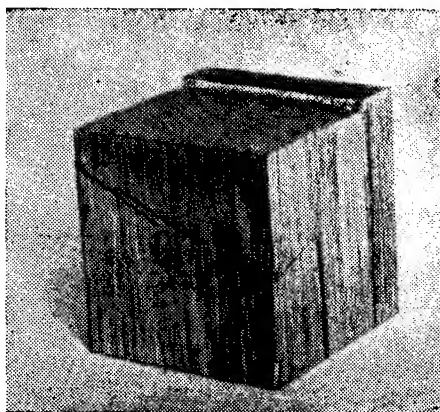


Рис. 3.

Эффект концентрации напряжений уравнивается с эффектом, вызванным поддерживающим действием, при минимальном значении предела прочности древесины. Минимальное значение имеет место тогда, когда нагруженная часть сечения равна $0,7 F$ для сосны (рис. 1) и $0,6 F$ для дуба (рис. 2). Выравнивание эффекта концентрации и поддерживающего действия наблюдается тогда, когда ненагруженная часть поперечного сечения достигает $0,3 F$ для сосны и $0,4 F$ для дуба.

С дальнейшим уменьшением нагруженной части поперечного сечения образца, а следовательно, с дальнейшим увеличением ненагруженного объема образца превалирующее значение приобретает эффект поддерживающего действия, что изображено на правой части кривой (рис. 1 и 2), поднимающейся кверху.

Картина деформации разрушенного бруска при сжатии по части его поперечного сечения показана на рис. 3. Эта картина указывает на то, что поддерживающее действие ненагруженного объема образца, оказываемое пластически деформированному объему образца, возникает в результате сопротивления древесины сдвигу по плоскости между обоими объемами. В результате этого происходит передача сжимающей нагрузки на ненагруженную часть образца, благодаря чему повышается несущая способность нагруженной части образца.

Опыты на сжатие деревянных образцов наглядно подтверждают наличие эффекта поддерживающего действия.

О теории поддерживающего действия при изгибе балки, основанной на сопротивлении древесины сдвигу по граничной плоскости между пластически деформированным слоем балки и упруго напряженным объемом ее, мы упоминали выше.

Как известно, при изгибе балки в сжатом ее слое (рис. 4) возникают сдвиги, аналогичные сдвигам при простом сжатии. Сдвиги эти

проявляются на наружных гранях, параллельных плоскости изгиба балки, в виде отдельных вертикальных складок, расположенных в различных местах по длине балки, а также на наружной грани балки, параллельной нейтральной плоскости, где они проявляются в виде линий сдвига, направленных под углом к оси балки и расположенных в отдельных местах по длине балки. С возрастанием изгибающего момента развитие пластических деформаций в сжатом слое изгибаемой балки происходит как за счет развития ранее образовавшихся складок и линий сдвига, так и за счет образования и развития новых складок и линий сдвига в новых местах. Последовательность образования складок и линий сдвига по длине балки определяется наличием распре-

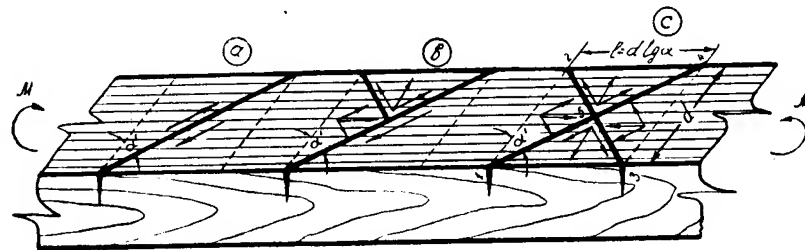


Рис. 4.

лением материала балки с разными значениями предела прочности сжатой древесины при изгибе. Линии сдвига, появляющиеся на нагруженной поверхности, параллельной нейтральной плоскости, возникают почти мгновенно при определенном значении изгибающего момента.

Складки на наружных поверхностях, параллельных плоскости изгиба балки, развиваются по высоте балки с ростом изгибающего момента, постепенно приближаясь к нейтральной плоскости балки. Согласно вышесказанному, сдвиги возникают в параллельных нейтральной плоскости слоях балки. Сдвиги постепенно распространяются от слоев у поверхности балки к внутренним слоям, лежащим ближе к нейтральной оси.

Наиболее развитая система линий сдвига показана на рис. 4,с. Часто при изгибе балки развивается только часть указанных линий сдвига, как это указано на рис. 4,а и б.

При изгибе балки в условиях сдвига находится лишь часть объема изогнутой балки, так как сдвиги возникают, во-первых, только в отдельных частях по длине балки и, во-вторых, в условиях сдвига в сжатой зоне балки находится лишь слой определенной толщины, а другая часть сжатой балки и вся растянутая зона балки находятся в упругом напряженном состоянии.

Сопротивление смещению частей пластически деформированного слоя изогнутой балки оказывают сопротивление сдвигу древесины по наклонной плоскости сдвига и сопротивление упруго напряженного объема балки, прилегающего к пластически деформированному слою и связанного с ним.

При обычном сжатии разрушение образца происходит также по плоскостям сдвига. В этом случае смещению отдельных частей образца препятствует только лишь то сопротивление древесины, которое возникает по плоскостям сдвига, так как каких-либо упруго напряженных объемов, которые оказали бы поддерживающее действие, в этом случае не имеется. Таким образом, при изгибе балки сопротивление смещению отдельных частей пластически деформированного слоя балки больше, чем сопротивление смещению отдельных частей образца, находящихся

в условиях простого сжатия. Предел прочности древесины при сдвиге в обоих случаях следует считать одинаковым. Ясно, что угол сдвига в пластично деформированном слое изогнутой балки больше, чем угол сдвига образца, разрушенного при сжатии. Опыты подтверждают указанное соотношение между углами сдвига.

Пусть при сжатии угол сдвига равен α , предел прочности при сжатии — $\sigma_{сж}$, касательное напряжение в плоскости сдвига — τ , угол сдвига при изгибе балки — α' , предел прочности сжатию при изгибе — $\sigma'_{сж}$, касательное напряжение в плоскости сдвига — τ' .

Сдвиг возникает тогда, когда касательное напряжение по наклонной площадке сдвига достигает значения предела прочности при сдвиге, а нормальное напряжение по нормальной площадке достигает значения, которое мы называем пределом прочности сжатию.

Тогда при сжатии

$$\tau = \frac{\sigma_{сж}}{2} \sin 2\alpha,$$

при изгибе

$$\tau' = \frac{\sigma'_{сж}}{2} \sin 2\alpha'.$$

Линия сдвига появляется как при изгибе, так и при сжатии тогда, когда касательное напряжение по плоскости сдвига достигает предела прочности древесины при сдвиге. Таким образом, будем иметь

$$\tau = \tau' = \frac{\sigma_{сж}}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma'_{сж}}{2} \sin 2\alpha',$$

откуда

$$\sigma'_{сж} = \sigma_{сж} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'}.$$

Так как $\alpha' > \alpha$ и оба они больше 45° , то

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'} > 1.$$

Таким образом,

$$\sigma'_{сж} > \sigma_{сж}.$$

В случае изгиба бруска прямоугольного сечения, предельная несущая способность его, при учете только пластодеформаций, будет равна

$$M = \mu \sigma_{сж} W.$$

Если кроме пластодеформаций древесины при изгибе балки учесть также поддерживающее действие упруго напряженных объемов балки, то в сжатом пластически деформированном слое балки будет увеличен предел прочности древесины, который станет равным

$$\sigma'_{сж} = \sigma_{сж} \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'}.$$

Так как для любой формы поперечного сечения балки коэффициент $\mu = f(\eta) = f\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_{сж}}\right)$, то в формуле для определения предельной несущей способности балки мы будем иметь дело с измененным значением коэффициента $\mu' = f\left(\frac{\sigma_p}{\sigma'_{сж}}\right)$. Таким образом, измененное значение предельной

несущей способности балки при изгибе равно $M' = \mu' \sigma'_{сж} W$. Коэффициент поддерживающего действия равен

$$\xi = \frac{M'}{M} = \frac{\mu' \sigma'_{сж} W}{\mu \sigma_{сж} W} = \frac{\mu' \sigma'_{сж}}{\mu \sigma_{сж}} = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'}.$$

Так как

$$\eta = \frac{\sigma_p}{\sigma_{сж}}, \quad \eta' = \frac{\sigma_p}{\sigma'_{сж}},$$

то

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{\sigma'_{сж}}{\sigma_{сж}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'}.$$

Выражение для коэффициента поддерживающего действия будет иметь вид

$$\xi = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\eta}{\eta'}.$$

Предельная несущая способность балки при изгибе с учетом как пластических деформаций, так и поддерживающего действия будет равна

$$M' = \mu' \sigma'_{сж} W = \xi \frac{\eta' \mu}{\eta} \sigma'_{сж} W = \xi \frac{\eta' \mu}{\eta} \sigma_{сж} \frac{\eta}{\eta'} W = \xi \mu \sigma_{сж} W = k \sigma_{сж} W,$$

где $k = \xi \mu$ — коэффициент повышения несущей способности изгибаемой балки при учете пластических деформаций и поддерживающего действия упруго напряженных волокон балки.

Пользуясь выражениями

$$\xi = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'} \quad \text{и} \quad \eta' = \eta \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha},$$

можно по экспериментально найденным углам сдвига α (при сжатии) и α' (при изгибе) найти теоретически значения коэффициентов μ , ξ и k для любой формы поперечного сечения балки.

По экспериментально найденным углам сдвига, учитывая пластификацию древесины при изгибе, нами были определены значения коэффициентов ξ , μ и k для разных древесных пород (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Порода	Дуб	Граб	Клен	Липа	Черемуха	Орех	Тисс	Акация	Сосна	Осокорь	Береза	Тополь	Ясень	Ольха
μ	1,75	1,64	1,48	1,50	1,64	1,76	1,37	1,76	1,67	1,73	1,59	1,76	1,81	1,55
ξ	1,15	1,22	1,11	—	1,35	1,12	1,11	1,26	1,06	1,18	1,15	1,18	1,20	1,23
k	2,02	2,00	1,65	—	2,21	1,97	1,52	2,24	1,78	2,04	1,85	2,08	2,18	1,90

Нужно сказать, однако, что значения углов сдвига при сжатии и изгибе определяются из опыта в результате критического отбора большого числа измерений, так как сдвиги в большинстве случаев имеют весьма искаженную форму. Ниже даются формулы для теоретического определения углов сдвига α и α' .

Пусть нормальное напряжение по поперечному сечению сжатого вдоль волокон бруска будет равно σ . Нормальное и касательное напря-

жения по наклонной площади, наклоненной под углом α_x , будут равны:

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \alpha_x;$$

$$\tau = \sigma \sin \alpha_x \cos \alpha_x.$$

Если учесть внутреннее трение в материале сжатого бруска и принять коэффициент внутреннего трения равным $f = \operatorname{tg} \varphi$, то сдвигающее напряжение по вышеуказанной наклонной площадке будет равно $\tau - f \sigma_n$.

После подстановки значений τ , σ_n и f в формулу сдвигающего напряжения получим

$$\sigma \sin \alpha_x \cos \alpha_x - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sigma \cos^2 \alpha_x,$$

откуда после упрощений получим выражение

$$\sigma \frac{\cos \alpha_x}{\cos \varphi} \sin (\alpha_x - \varphi).$$

Приравняв производную этого выражения нулю, получим условие максимума выражения

$$-\sin \alpha_x \sin (\alpha_x - \varphi) + \cos \alpha_x \cos (\alpha_x - \varphi) = 0,$$

или $\cos (2\alpha_x - \varphi) = 0$. Отсюда получим то значение угла наклона наклонной площадки $\alpha_x = \alpha$, при котором сдвигающее напряжение достигает максимального значения $\alpha = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$.

При этом значении угла α касательное и нормальное напряжения по этой наклонной площадке будут равны

$$\tau = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin (90^\circ + \varphi) = \frac{\sigma}{2} \cos \varphi;$$

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \alpha = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \frac{\sigma}{2} (1 - \sin \varphi).$$

Величина наибольшего сдвигающего напряжения по найденной наклонной плоскости будет равна

$$\begin{aligned} \tau - f \sigma_n &= \frac{\sigma}{2} \left[\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} (1 - \sin \varphi) \right] = \\ &= \frac{\sigma}{2} \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sigma}{2} \operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Разрушение бруска от сдвига по наклонной плоскости под углом α наступит при таком предельном значении нормального напряжения по его поперечному сечению, при котором наибольшее сдвигающее напряжение по указанной плоскости не достигнет величины предела прочности древесины сдвигу под углом α

$$\frac{\sigma_{сж}}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \tau_{сд}^\alpha$$

или

$$\sigma_{сж} = \frac{2\tau_{сд}^\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{2\tau_{сд}^\alpha}{\operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} = 2\tau_{сд}^\alpha \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Для разных древесных пород величину коэффициента внутреннего трения $f = \operatorname{tg} \varphi$ можно брать равной 0,25—2,25. Предел прочности древесины срезыванию под углом можно считать изменяющимся по закону $\tau_{сд}^a = \tau_{сд}^b \cos^2 \alpha + \tau_{сд}^n \sin^2 \alpha$, где предел прочности древесины сосны скалыванию вдоль волокон $\tau_{сд}^b = 40 \text{ кг/см}^2$ и перерезыванию поперек волокон $\tau_{сд}^n = 250 \text{ кг/см}^2$.

По указанным формулам можно теоретически определить величину предела прочности древесины сжатия вдоль волокон.

Величина коэффициента внутреннего трения разных древесных пород может быть легко определена экспериментально путем непосредственного определения угла наклона линий сдвига на разрушенных при сжатии образцах.

По углам сдвига *, измеренным на разрушенных при сжатии образцах, была составлена табл. 2 коэффициентов внутреннего трения для различных древесных пород. Эти коэффициенты внутреннего трения, вероятно, можно также получить в результате вибрационных испытаний по значению декремента затухания. Как видно из табл. 2, коэффициент внутреннего трения для некоторых древесных пород достигает значений, больших единицы.

Т а б л и ц а 2

Порода	Дуб	Граб	Клен	Липа	Черемуха	Орех	Тисс	Акация	Сосна	Осокорь	Береза	Тополь	Ясень	Ольха
Угол наклона линий сдвига в град.	60	53	52	78	60	65	60	72	54	56	62	67	56	74
Коэффициент внутреннего трения	0,577	0,287	0,249	2,250	0,577	0,839	0,577	1,376	0,325	0,404	0,675	0,966	0,404	1,600

Разрушение по наклонным плоскостям сдвига в пластodeформированном слое в сжатой зоне изогнутого образца (рис. 4,с) наступит только тогда, когда будет преодолено не только сопротивление древесины сдвигу по наклонной плоскости сдвига, но будет также нарушено сопротивление связей между пластически деформированным слоем и упруго напряженным объемом образца по граничной плоскости между ними (параллельной нейтральной плоскости). Ясно, что нормальное напряжение, действующее в поперечном сечении пластифицированного сжатием слоя $\sigma_{сж}$ будет больше, чем предел прочности древесины при простом сжатии $\sigma_{сж}$. Угол наклона α' плоскости сдвига в пластифицированном слое изогнутого бруска будет также больше угла сдвига α бруска, разрушенного при простом сжатии. Увеличение угла сдвига α' можно рассматривать как результат условного повышения коэффициента внутреннего трения в пластифицированном слое изогнутого бруска под действием дополнительных сил связей, возникающих на границе между пластифицированным слоем изогнутой балки и упруго напряженным ее объемом. Используя измеренные углы сдвига** на разрушенных при изгибе образцах, получим величины коэффициентов внутреннего трения

* Ф. П. Белянкин. Пластичні деформації і підтримуюча дія при згині дерев'яних балок, вид. АН УРСР, 1936, стр. 52.

** Там же.

для разных древесных пород (табл. 3). Эти коэффициенты внутреннего трения можно, вероятно, также получить в результате вибрационного изгиба по значениям декрементов затухания. Значительное повышение коэффициента внутреннего трения при изгибе следует считать условным, так как эти значения учитывают не только внутреннее трение в материале, но и сопротивление связей по граничной плоскости между пластифицированной и упруго напряженной древесиной.

Таблица 3

Порода	Дуб	Грб	Клен	Липа	Чермуха	Орех	Тисс	Акация	Сосна	Осокорь	Береза	Тополь	Ясень	Ольха
Угол наклона линий сдвига в град.	68	72	67	83	78	72	69	81	61	72	72	75	72	81
Коэффициент внутреннего трения	1,036	1,376	0,966	4,011	2,246	1,376	1,111	3,078	0,625	1,376	1,376	1,732	1,376	3,078

Имея коэффициент внутреннего трения при изгибе, можно определить, согласно изложенному выше, все величины, необходимые для вычисления коэффициента ξ .

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ГИБКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

П. И. Семенов

В статье предлагается приближенный способ расчета гибких стержней, применяемых в машиностроении и приборостроении. При расчете учитываются деформации конечной величины и деформированная схема стержня.

Гибкие упругие стержни часто встречаются в практике. Они применяются в машиностроении, приборостроении и точной механике в качестве деталей рессор, амортизаторов, пружин. Такие стержни имеют незначительные поперечные размеры по сравнению с длиной, а следовательно, и большую гибкость.

При изгибе стержня отдельные бесконечно близкие поперечные сечения получают бесконечно малые взаимные деформации. Следовательно, к ним можно применить уравнения теории упругости (если напряжения не превосходят предела пропорциональности). Но сечения, расположенные на конечных расстояниях, могут иметь перемещения таких же порядков, как и расстояния между сечениями.

Эти обстоятельства вносят существенные изменения в расчет гибких стержней. Их нельзя рассчитывать по первоначальной недеформированной схеме, как это обычно делается в теории малых деформаций (сопротивлении материалов). Здесь надо исходить не из приближенного, а из точного дифференциального уравнения упругой линии, которое, являясь нелинейным, значительно усложняет задачу. Зависимость между нагрузками и перемещениями перестает быть линейной, вследствие чего становится неприменимым и принцип независимости действия сил и ряд других теорем об упругих системах.

Проведение расчета гибких стержней методами сопротивления материалов приводит к значительным ошибкам.

Вопросу точного расчета гибких стержней посвящены труды многих советских ученых: акад. А. Н. Крылова, акад. А. Н. Динника, проф. Е. Н. Тихомирова и др. Особенно важные результаты в этой области получены лауреатом Сталинской премии проф. Е. П. Поповым.

Как известно, уравнение упругой линии для прямолинейного стержня имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{M}{EJ}. \quad (1)$$

Точное выражение кривизны $\frac{1}{\rho}$ может быть записано так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\cos \varphi}, \quad (2)$$

где M — изгибающий момент в произвольном сечении;

EJ — жесткость стержня;

φ — угол поворота поперечного сечения стержня при деформации;

x, y — координаты точек упругой линии;

s — длина ее дуги.

В этой статье речь идет о приближенном интегрировании уравнения (1) методом последовательных приближений, при этом выражение кривизны принимается в форме Ясинского, в котором независимым переменным является длина дуги. Принимая эту форму для выражения кривизны, запишем (1) в виде

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{M}{EJ} \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}. \quad (3)$$

Абсциссы точек упругой линии, а также плечи сил определяются на основании известного соотношения

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \quad (4)$$

по формуле

$$x = \int_{s_0}^s \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds. \quad (5)$$

Для удобства дальнейшего изложения формулы (3) и (5) преобразовываются нами так:

$$\frac{d^2v}{d\sigma^2} = -\frac{Ml}{EJ} \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2}; \quad (3')$$

$$u = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2} d\sigma. \quad (5')$$

В этих формулах $v = \frac{y}{l}$ и $u = \frac{x}{l}$ являются относительными коор-

динатами упругой линии, $\sigma = \frac{s}{l}$ — относительной длиной дуги, l — длиной стержня.

Будем в дальнейшем исходить из общепринятых в теории конечных деформаций предположений:

1. Напряжения не превосходят предела пропорциональности — материал следует закону Гука.

2. Деформации от сдвига являются незначительными по сравнению с изгибными, и ими можно пренебрегать.

3. Продольная сила вызывает также незначительные деформации, и их можно не учитывать.

Последнее предположение дает нам право считать, что длина упругой линии не изменяется при деформации.

Сущность предполагаемой методики состоит в следующем.

Разложим выражение квадратного корня в ряд

$$\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 - \dots \quad (6)$$

Если возьмем первый член ряда, т. е. примем $\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2} \approx 1$, то получим обычное уравнение сопротивления материалов, проинтегрировав которое два раза, получим уравнение упругой линии. Это решение назовем нулевым приближением.

Чтобы получить решение в первом приближении, возьмем два члена ряда (6), т. е. положим $\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2$, причем выражение $\frac{dv}{d\sigma}$ берем из нулевого приближения. Решив полученное линейное уравнение, найдем более точные данные для упругой линии.

Во втором приближении принимаем три члена ряда и $\frac{dv}{d\sigma} = \sin \varphi$ берем из предыдущего приближения. Этот процесс, вообще говоря, можно продолжать и дальше, однако при этом значительно усложняются математические выкладки.

Таким образом, в отличие от обычного метода последовательных приближений, здесь в каждом последующем приближении берется более точное дифференциальное уравнение.

Для иллюстрации рассмотрим числовые примеры.

Пример 1. Найти перемещения стержня, жестко зашпеленного на одном и нагруженного силой P на втором свободном конце (рис. 1). Изгибающий момент в произвольном сечении равен

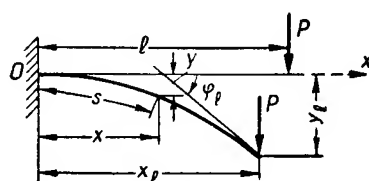


Рис. 1.

$$M = -P(x_l - x) = -Pl(u_l - u) = -Pl \int_{\sigma}^1 \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2} d\sigma. \quad (7)$$

Обозначая

$$\beta = \frac{Pl^2}{2EJ}, \quad (8)$$

перепишем уравнение (3') в следующем виде:

$$\frac{d^2v}{d\sigma^2} = 2\beta \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2} \int_{\sigma}^1 \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2} d\sigma. \quad (9)$$

Ограничиваясь первым членом ряда (6) и интегрируя полученное уравнение с учетом граничных условий (при $\sigma = 0$ $v = 0$ и $\sin \varphi = 0$), получим в нулевом приближении

$$v = \beta \left(\sigma^2 - \frac{1}{3} \sigma^3 \right); \quad \frac{dv}{d\sigma} = 2\beta \left(\sigma - \frac{1}{2} \sigma^2 \right); \quad u = \sigma. \quad (10)$$

Для первого приближения надо взять два члена указанного ряда и величину $\frac{dv}{d\sigma}$ из (10). При преобразовании уравнения (9) в этом приближении надо отбросить члены, содержащие β в степени выше третьей. В противном случае мы сохраним члены с такой степенью β , которых не содержится в выражении производной $\frac{dv}{d\sigma}$ после возведения его в квадрат, т. е. мы получили бы формулы с несколькими неверными членами.

В результате интегрирования будем иметь

$$v = \beta \left[\left(\sigma^3 - \frac{\sigma^3}{3} \right) - \beta^2 \left(\frac{4}{15} \sigma^2 + \frac{1}{3} \sigma^4 - \frac{7}{15} \sigma^5 + \frac{1}{5} \sigma^6 - \frac{1}{35} \sigma^7 \right) \right];$$

$$\frac{dv}{d\sigma} = 2\beta \left[\left(\sigma - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - \beta^2 \left(\frac{4}{15} \sigma + \frac{2}{3} \sigma^3 - \frac{7}{6} \sigma^4 + \frac{3}{5} \sigma^5 - \frac{1}{10} \sigma^6 \right) \right]; \quad (11)$$

$$u = \sigma - \beta^2 \left(\frac{2}{3} \sigma^3 - \frac{1}{2} \sigma^4 + \frac{1}{10} \sigma^6 \right).$$

Аналогично можно получить формулы второго приближения.

По этим формулам, придавая σ различные значения в пределах 0—1, можно вычислить перемещения всех точек стержня.

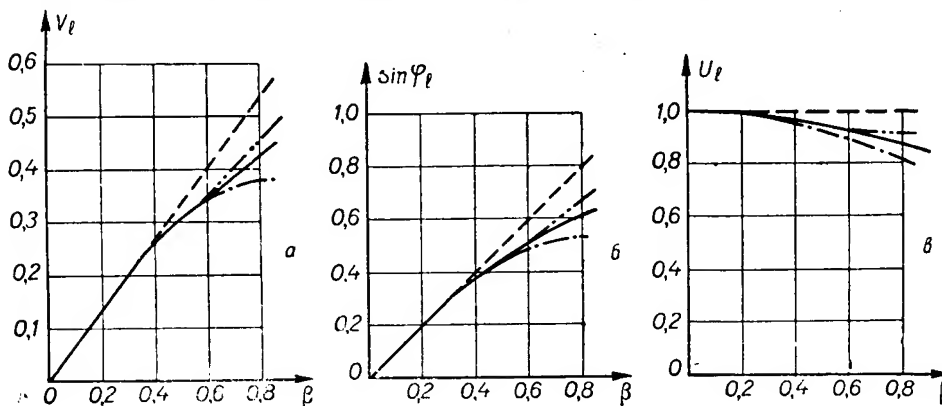


Рис. 2.

Перемещение конца консоли ($\sigma = 1$) определяется для нулевого приближения по формулам

$$v_l = \frac{2}{3} \beta; \quad \sin \varphi_l = \beta; \quad u_l = 1; \quad (10')$$

для первого приближения —

$$v_l = \frac{2}{3} \beta \left(1 - \frac{16}{35} \beta^2 \right); \quad \sin \varphi_l = \beta \left(1 - \frac{8}{15} \beta^2 \right); \quad u_l = 1 - \frac{4}{15} \beta^2; \quad (11')$$

для второго приближения —

$$v_l = \frac{2}{3} \beta \left(1 - \frac{16}{35} \beta^2 + \frac{752}{1925} \beta^4 \right);$$

$$\sin \varphi_l = \beta \left(1 - \frac{8}{15} \beta^2 + \frac{752}{1575} \beta^4 \right); \quad u_l = 1 - \frac{4}{15} \beta^2 + \frac{64}{315} \beta^4. \quad (12)$$

Результаты вычисления по этим формулам приведены на графиках (рис. 2, а, б, в); там же приведены результаты точного решения. На рис. 2 сплошными линиями показаны результаты точного решения, пунктирными — приближенного в нулевом приближении, штрих-пунктирными — в первом и пунктирными с двумя точками — во втором приближении.

Из этих графиков видно, что степень точности нашего метода зависит от числа приближений и величины перемещений. Чем больше деформируется стержень, тем меньше точность метода и тем больше надо выполнить приближений. Отсюда можно установить пределы применимости формул того или другого приближения. Так, формулами (11) можно пользоваться при $\beta \leq 0,6$, формулами (12) — при $\beta \leq 0,7$, формулами (10) — при $\beta \leq 0,3$. Это показывает, что для данного примера

методика сопротивления материалов применима не только для малых деформаций (при $\beta = 0,3$ $v_l = 0,2$ — прогиб конца консоли составляет 20% ее длины).

Пример 2. Определить деформации стержня при продольном изгибе с эксцентриситетом (рис. 3,а).

Изгибающий момент в произвольном сечении равен

$$M = -N(e + y_l - y) = -Nl(\delta + v_l - v), \quad (13)$$

где $\delta = \frac{e}{l}$ — относительный эксцентриситет*.

Точное дифференциальное уравнение (3') примет вид

$$\frac{d^2 v}{d\sigma^2} = n^2(\delta + v_l - v) \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2}, \quad (14)$$

где

$$n^2 = \frac{Nl^2}{EJ}. \quad (15)$$

При нулевом приближении уравнение (14) можно записать так:

$$\frac{d^2 v}{d\sigma^2} + n^2 v = n^2(\delta + v_l). \quad (16)$$

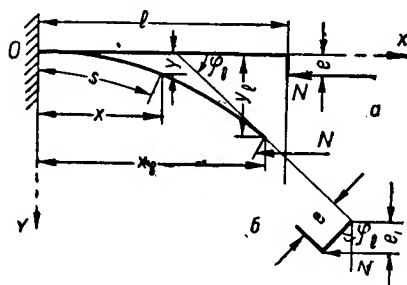


Рис. 3.

Интегрируя его и учитывая граничные условия, получим

$$v = (\delta + v_l)(1 - \cos n\sigma); \quad \frac{dv}{d\sigma} = n(\delta + v_l) \sin n\sigma; \quad u = \sigma. \quad (17)$$

При первом приближении уравнение (14) будет иметь вид

$$\frac{d^2 v}{d\sigma^2} = n^2(\delta + v_l - v) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 \right]. \quad (18)$$

Используя (17), находим:

$$\frac{d^2 v}{d\sigma^2} + n^2 v = n^2(\delta + v_l) - \frac{n^4}{8}(\delta + v_l)^3 \cos n\sigma + \frac{n^4}{8}(\delta + v_l)^3 \cos 3n\sigma. \quad (19)$$

После интегрирования этого линейного уравнения с правой частью с учетом граничных условий получим

$$v = (\delta + v_l) \left[(1 - \cos n\sigma) + \frac{n^2(\delta + v_l)^2}{64} (\cos n\sigma - \cos 3n\sigma - 4n\sigma \sin n\sigma) \right];$$

$$\frac{dv}{d\sigma} = (\delta + v_l) n \left[\sin n\sigma + \frac{n^2(\delta + v_l)^2}{64} (3 \sin 3n\sigma - 5 \sin n\sigma - 4n\sigma \cos n\sigma) \right]; \quad (20)$$

$$u = \sigma - \frac{n(\delta + v_l)^2}{8} (2n\sigma - \sin 2n\sigma).$$

Последнее выражение получается из (5'), если ограничиться двумя членами ряда (6) и использовать вторую формулу (17).

Из формул (20) видим, что перемещения точек оси стержня зависят от v_l — прогиба конца стержня. Для определения v_l надо воспользоваться первой из формул (20), применив ее для $\sigma = 1$ и решив затем кубическое уравнение.

* Здесь мы предполагаем, что эксцентриситет e не изменяется в процессе деформаций (что соответствует одновременному действию продольной силы и момента, приложенных к концу стержня). Если же эксцентриситет изменяется, то вместо e везде надо подставить $e_1 = e \cos \varphi_l$ (рис. 3,б).

Частные случаи

а) Продольная сила равна критической, т. е. $n = \frac{\pi}{2}$. Для определения перемещений конца консоли формулы (20) принимают следующий вид:

$$v_l = \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{2\delta} - \delta; \quad \sin \varphi_l = 2\sqrt[3]{2\delta} - 2\delta; \quad u_l = 1 - \sqrt[3]{4\delta^2}. \quad (21)$$

Эти формулы просты и дают хорошую точность.

б) Эксцентриситет $\delta = 0$ (центральный продольный изгиб). Перемещения конца консоли определяются по формулам

$$\begin{aligned} v_l &= \frac{4}{n \sqrt{\sin^2 n - n \operatorname{tg} n}}; \\ \sin \varphi_l &= \frac{\sin 4n - 4n}{\cos n (\sin^2 n - n \operatorname{tg} n)^{\frac{3}{2}}}; \\ u_l &= 1 - \frac{2(2n - \sin 2n)}{n (\sin^2 n - n \operatorname{tg} n)}. \end{aligned} \quad (22)$$

По этим формулам построены графики (рис. 4 — пунктирные линии); там же сплошными линиями нанесены результаты точного решения. По оси абсцисс на рис. 4 отложены величины параметра $\mu = \frac{N}{N_s}$, где $N_s = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$. В пределах рассматриваемых деформаций совпадение хорошее; ошибка менее 2%.

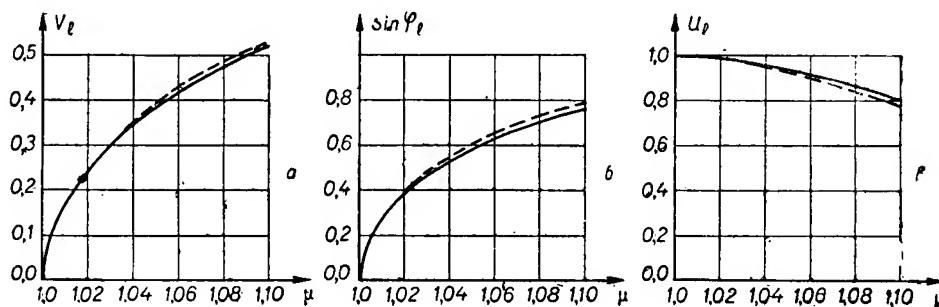


Рис. 4.

Изложенный способ без особых затруднений может быть применен в тех случаях, когда изгибающий момент изменяется по длине стержня непрерывно, например при распределенной по длине поперечной нагрузке. При произвольном изменении момента усложняется определение произвольных постоянных.

С точки зрения точности данный метод является приемлемым, когда рассматриваемые перемещения стержня ограничены по величине. Эти перемещения условно названы средними. В случае больших перемещений надо пользоваться точным уравнением, решаемым, например, методами проф. Е. П. Попова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Попов, Теория и расчет гибких упругих деталей, изд. ЛКВВИА, Ленинград, 1947.
2. Е. П. Попов, Нелинейные задачи статики тонких стержней, Гостехиздат, 1948. Там же см. библиографию.

КОНТУРНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ КРИВОГО СТЕРЖНЯ

Б. И. Окс

В настоящей статье изложены результаты исследования контурных особых точек кругового стержня при действии на концы его различных нагрузок. Показано как, зная положение особых точек, определить характер приложенных к концам стержня нагрузок. Статья может быть использована при экспериментальном исследовании стержневых систем с криволинейными элементами поляризационно-оптическим методом.

В машинах и строительных конструкциях большое распространение имеют стержневые системы с криволинейными элементами таких размеров, что их нельзя рассчитать ни обычными приемами строительной механики, ни методами теории упругости. Для расчета этих конструкций может быть применен поляризационно-оптический метод исследования напряжений.

Получаемая с помощью этого метода картина полос (семейство изоклин) модели конструкции позволяет с достаточной практической точностью определить положение сечений, в которых изгибающие моменты равны нулю. Если положение таких сечений известно, то последующий аналитический расчет может быть значительно упрощен.

Семейства полос и изоклин в районе точек перегиба в призматических стержнях прямоугольного сечения подробно изучены. Изучен также один частный случай изгиба кривого стержня.

В настоящей статье исследованы некоторые особенности изоклин и картины полос кругового стержня прямоугольного сечения.

Рассмотрим такой стержень, один конец которого зашкелен,

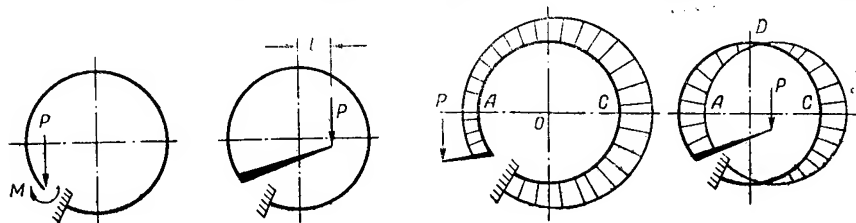


Рис. 1.

Рис. 2.

а к другому приложена нагрузка, состоящая из силы P и изгибающего момента M . Эту нагрузку можно заменить одной силой P , отстоящей от конца стержня на расстоянии $l = \frac{M}{P}$ (рис. 1).

В зависимости от расстояния l эпюры изгибающих моментов и соответствующие им картины полос имеют следующий характер.

1. В сечениях, в которых изгибающий момент имеет наибольшее или наименьшее значение, поперечная сила равна нулю (рис. 2, сечения А и С). Картина полос симметрична по отношению к этим сечениям.

2. По мере удаления от сечения, в котором изгибающий момент имеет наибольшее значение, полосы приближаются к оси стержня (рис. 3,а). По мере удаления от сечения, в котором изгибающий момент имеет наименьшее значение, полосы отдаляются от оси стержня (рис. 3,б).

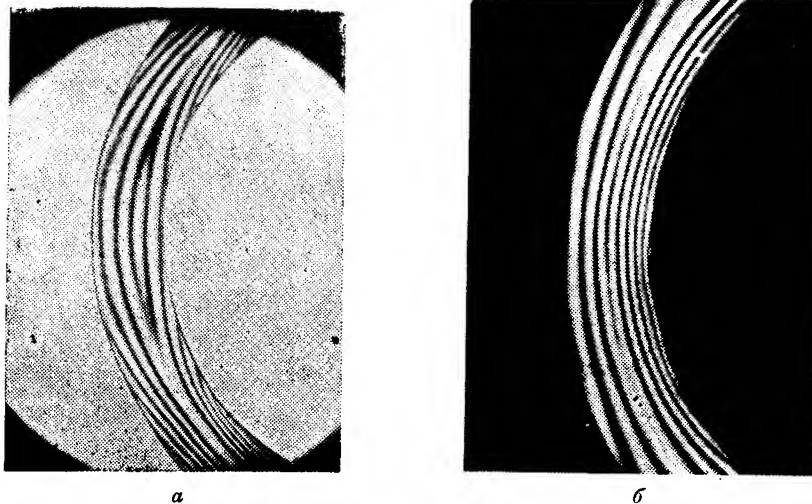


Рис. 3.

3. В окрестности сечения, в котором изгибающий момент равен нулю (сечение D, рис. 2), картина полос имеет весьма характерный вид (рис. 4), позволяющий отличить этот участок стержня от всех остальных и с достаточной точностью установить положение такого сечения.

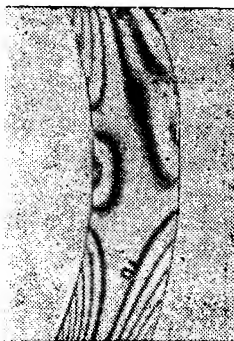


Рис. 4.

Остановимся на этом вопросе подробнее. Рассмотрим стержень, имеющий круговую ось и постоянное сечение прямоугольной формы (рис. 5).

Найдем напряжения, возникающие на контуре этого стержня при действии силы P . Представим эти напряжения в виде суммы напряжений, возникающих при действии в сечении OB изгибающего момента M и поперечной силы P .

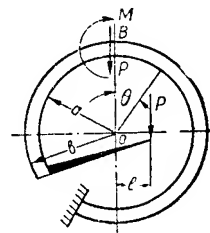


Рис. 5.

Воспользуемся полярными координатами, выбрав начальный радиус-вектор в положении OB .

Напряжения, возникающие в стержне при действии в сечении OB силы P , могут быть выражены формулами изгиба кривого бруса: для наружного контура

$$\sigma'_{\theta b} = \frac{2P}{N_1 b} (\beta^2 - 1) \sin \theta; \quad (1)$$

для внутреннего

$$\sigma'_{\theta a} = \frac{2P}{N_1 a} (\beta^2 - 1) \sin \theta. \quad (2)$$

Напряжения, возникающие в стержне при действии в сечении OB только момента M , могут быть выражены формулами чистого изгиба кривого бруса: для наружного контура

$$\sigma''_{\theta b} = -\frac{4M}{N_2 a^2} (\beta^2 - 1 - 2 \ln \beta), \quad (3)$$

для внутреннего

$$\sigma''_{\theta a} = -\frac{4M}{N_2 a^2} (\beta^2 - 1 - 2\beta^2 \ln \beta). \quad (4)$$

В этих формулах $\beta = \frac{b}{a}$, a — внутренний, а b — наружный радиусы стержня, $N_1 = 1 - \beta^2 + (1 + \beta^2) \ln \beta$, $N_2 = (\beta^2 - 1)^2 - 4\beta^2 (\ln \beta)^2$.

При совместном действии силы P и изгибающего момента M напряжения на наружном контуре равны

$$\sigma_{\theta b} = \sigma'_{\theta b} + \sigma''_{\theta b}, \quad (5)$$

а на внутреннем —

$$\sigma_{\theta a} = \sigma'_{\theta a} + \sigma''_{\theta a}. \quad (6)$$

Точки на контуре, в которых напряжения $\sigma_{\theta b}$ и $\sigma_{\theta a}$ равны нулю, являются особыми точками. В каждой особой точке сходятся изоклины разных параметров. Полосы в окрестности таких точек представляют собой части окружающих каждую особую точку овалов. Поэтому особые точки можно просто и легко найти при помощи оптического метода исследования напряжений. Приравняв правые части выражений (5) и (6) нулю и заменив в них составляющие напряжений на основании формул (1) — (4), получим систему уравнений, из которой найдем значения θ_a и θ_b , определяющие положения особых точек на наружном и внутреннем контурах,

$$\sin \theta_a = 2 \frac{2\beta^2 \ln \beta - \beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{l}{a}; \quad (7)$$

$$\sin \theta_b = 2 \frac{\beta^2 - 1 - 2 \ln \beta}{\beta^2 - 1} \beta \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{l}{a}. \quad (8)$$

При помощи этих выражений можно определить положение силы P .

Нетрудно показать, что углы θ_a и θ_b имеют одинаковые знаки и угол θ_b по абсолютной величине больше угла θ_a , причем, если $l > 0$, то $|\theta_b| > |\theta_a| > 0$.

Отсюда следует:

1. Каждому значению l соответствует не более двух особых точек на каждом контуре.

2. При значении $\frac{l}{a} = 0$ имеются две пары особых точек, расположенных на вертикальном диаметре (рис. 6,а).

3. При увеличении отношения $\frac{l}{a}$ особые точки на наружном контуре сближаются быстрее, чем на внутреннем (рис. 6,б). Фотография картины полос для этого случая показана на рис. 4.

4. При значении

$$\frac{l}{a} = \frac{l_2}{a} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - 1 - 2 \ln \beta} \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

особые точки на наружном контуре сливаются в одну точку (рис. 6,б).

5. При дальнейшем возрастании отношения $\frac{l}{a}$ особая точка на наружном контуре исчезает (рис. 6, г). Фотография картины полос для этого случая показана на рис. 7.

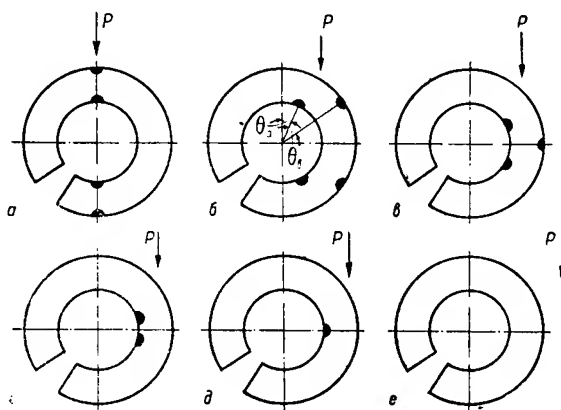


Рис. 6.

6. При значении

$$\frac{l}{a} = \frac{l_2}{a} = \frac{\beta^2 - 1}{2\beta^2 \ln \beta - \beta^2 - 1} \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

особые точки на внутреннем контуре сливаются (рис. 6, д).

7. При дальнейшем возрастании отношения $\frac{l}{a}$ и эта последняя особая точка исчезает (рис. 6, е).

При определении положения сечения, в котором изгибающий момент равен нулю (точка перегиба), в невысоких стержнях можно применить описанный ниже прием.

Рассмотрим стержень постоянного сечения, для которого отношение среднего радиуса $r = \frac{a+b}{2}$ к высоте сечения

$h = b - a$ велико. Разложим усилие в точке перегиба на две составляющие Q и N (рис. 8). Изгибающий момент в сечении, проходящем через точку A , равен

$$M_A = Qr \sin \theta_A + Nr(1 - \cos \theta_A),$$

а нормальное усилие в этом сечении равно $N_A = N \cos \theta_A - Q \sin \theta_A$.

Напряжение в точке A определяется формулой $\sigma_A = -\frac{M_A}{W} + \frac{N_A}{F}$, где W — момент сопротивления, а F — площадь поперечного сечения стержня.

Если точка A есть особая точка, т. е. в ней напряжения равны нулю, то для нее

$$\sigma_A = -\frac{Qr\theta_A}{W} + \frac{N - Q\theta_A}{F} = 0,$$



Рис. 7.

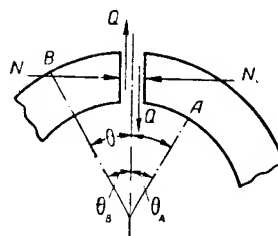


Рис. 8.

так как угол θ_A мал. Отсюда

$$\theta_A = \frac{N}{Q} \cdot \frac{1}{\left(\frac{rF}{W} + 1\right)};$$

точно так же, если точка B — особая точка на наружном контуре, то для нее

$$\theta_B = \frac{N}{Q} \cdot \frac{1}{\left(\frac{rF}{W} + 1\right)}.$$

Следовательно,

$$\theta_A = \theta_B = \frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, точка перегиба лежит приблизительно на пересечении биссектрисы угла между двумя радиусами, проведенными через особые точки, и оси стержня.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ ДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

В. Е. Салион

В статье рассматриваются изгибно-крутильные колебания высокой двутавровой балки под действием продольных периодических сил, приложенных эксцентрично. В результате исследования дифференциального уравнения получена первая область параметрического резонанса. Эта область справедлива для случая, когда эксцентриситет приложения силы велик.

Динамическая устойчивость плоской формы изгиба при внецентренном действии продольных периодических сил имеет большое практическое значение при расчетах высоких двутавровых балок на динамическую нагрузку.

Для этой цели рассмотрим случай, когда по концам балки в главной плоскости изгиба действуют эксцентрично приложенные продольные периодические силы (рис. 1), которые изменяются по закону

$$P_t = P_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где P_0 — амплитуда продольной силы,

ω — круговая частота изменения силы.

Начнем с вывода дифференциального уравнения задачи.

Дифференциальное уравнение изгиба балки в плоскости наименьшей жесткости имеет вид

$$B_1 \frac{d^2 u}{dx^2} = (M_0 \varphi - P_0 u) \cos \omega t, \quad (2)$$

где B_1 — жесткость балки на изгиб в наименьшей плоскости,

u — боковое перемещение,

φ — угол закручивания при выпучивании балки,

M_0 — изгибающий момент на концах балки.

Угол закручивания при выпучивании балки определяется из дифференциального уравнения вида

$$\frac{Dh^2}{2} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} - C \frac{d\varphi}{dx} = M_0 \cos \omega t \cdot \frac{du}{dx}, \quad (3)$$

где D — жесткость полки на изгиб,

C — жесткость стенки на кручение.

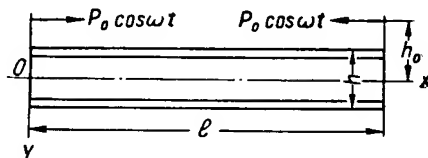


Рис. 1.

Дифференцируем равенство (3) по x , имеем

$$\frac{Dh^2}{2} \frac{d^4\varphi}{dx^4} - C \frac{d^2\varphi}{dx^2} = M_0 \cos \omega t \cdot \frac{d^2u}{dx^2}. \quad (4)$$

Исключая $\frac{d^2u}{dx^2}$ из равенства (4) с помощью уравнения (2), получим

$$\frac{Dh^2}{2} \frac{d^4\varphi}{dx^4} - C \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{M_0}{B_1} (M_0\varphi - P_0u) \cos^2 \omega t. \quad (5)$$

Присоединяя силы инерции, приходящиеся на единицу длины балки, получаем следующее дифференциальное уравнение изгибно-крутильных колебаний балки:

$$\frac{Dh^2}{2C} \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{(M_0^2\varphi - M_0P_0u) \cos^2 \omega t}{B_1C} - \frac{I_m \partial^4\varphi}{C \partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad (6)$$

где I_m — момент инерции единицы длины балки.

Перепишем это уравнение в такой форме:

$$\frac{Dh^2}{2C} \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{M_0^2 \cos^2 \omega t}{B_1C} \varphi - \frac{I_m}{C} \cdot \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2 \partial t^2} = - \frac{M_0 P_0 u}{B_1C} \cos^2 \omega t; \quad (7)$$

для краткости обозначим $\frac{Dh^2}{2C} = a^2$.

Это дифференциальное уравнение четвертого порядка с периодическими коэффициентами и с правой частью.

Решение уравнения (7) будем искать в форме

$$\varphi(x, t) = W(t) \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad u(x, t) = \eta(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (8)$$

где $W(t)$ и $\eta(t)$ — функции только от времени.

Если подставить эти значения в уравнение (7), то получим неоднородное дифференциальное уравнение для функции $W(t)$

$$\frac{d^2W}{dt^2} + \theta_n^2 \left\{ 1 - \frac{M_0^2}{M_{кр}^2} \cos^2 \omega t \right\} W = - \frac{M_0 P_0}{P_{кр} I_m C} \eta(t) \cos^2 \omega t, \quad (9)$$

где $\theta_n^2 = \frac{C}{I_m} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \right)$ — квадрат частоты собственных крутильных колебаний порядка n ,

$M_{кр}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \right) B_1 C$ — квадрат критического момента для балки,

$P_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 B_1}{l^2}$ — эйлерова критическая сила для балки.

Для краткости записи положим $M_0^2 : M_{кр}^2 = b_n^2$; $P_0 : P_{кр} = m$.

Теперь уравнение (9) переписывается так:

$$\frac{d^2W}{dt^2} + \theta_n^2 \{ 1 - b_n^2 \cos^2 \omega t \} W = - \frac{m M_0}{I_m C} \eta(t) \cos^2 \omega t. \quad (10)$$

Учитывая, что

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t, \quad (11)$$

дифференциальное уравнение (10) перепишем так:

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \theta_n^2 \left(1 - \frac{b_n^2}{2}\right) \left\{1 - \frac{b_n^2 \cos 2\omega t}{2 \left(1 - \frac{b_n^2}{2}\right)}\right\} W = -\frac{m M_0}{2 I_m C} \eta(t) [1 + \cos 2\omega t]; \quad (12)$$

для краткости обозначим $\frac{b_n^2}{2} = q_n^2$.

Общий интеграл дифференциального уравнения (12) равен сумме общего интеграла соответствующего уравнения без правой части и какого-либо частного интеграла данного уравнения. Однородное уравнение является в этом случае уравнением Матье, и его интеграл известен. Что же касается частного интеграла данного уравнения, то он может быть получен методом последовательных приближений.

Для этой цели представим уравнение (12) в виде

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \theta_n^2 W = \theta_n^2 q_n^2 W + \theta_n^2 q_n^2 W \cos 2\omega t - \frac{m M_0}{2 I_m C} \eta(t) [1 + \cos 2\omega t]. \quad (13)$$

Уравнение первого приближения будет

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \theta_n^2 W = -\frac{m M_0}{2 I_m C} \eta(t) [1 + \cos 2\omega t];$$

уравнение второго приближения будет

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \theta_n^2 W = -\frac{m M_0}{2 I_m C} \eta(t) [1 + \cos 2\omega t] + \theta_n^2 q_n^2 W$$

и т. д.

Для оценки устойчивости движения рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \theta_n^2 (1 - q_n^2) \left\{1 - \frac{q_n^2 \cos 2\omega t}{(1 - q_n^2)}\right\} W = 0. \quad (14)$$

Первая область параметрического резонанса будет

$$\sqrt{4 + 3 \frac{M_0^2}{M_{кр}^2}} \geq \frac{2\omega}{\theta_n} \geq \sqrt{4 - 3 \frac{M_0^2}{M_{кр}^2}}, \quad (15)$$

где $M_0 = P_0 h_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Челомей, Динамическая устойчивость авиаконструкций, 1939.
2. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. II.

РАБОТА СТАЛЬНЫХ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ПРИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ

Н. Д. Жудин

В статье изложены результаты испытаний двухпролетных балок при подвижной нагрузке. Для сравнения приведены данные испытаний таких же балок при статической однократной и повторной нагрузках.

Введение

В отечественной и зарубежной литературе имеется небольшое количество работ, посвященных исследованию работы неразрезных балок при подвижной нагрузке за пределом упругости.

В 1932 г. Г. Блейх [1] опубликовал теоретическое исследование, посвященное этому вопросу. Теоретической работой является также статья Э. Мелана [2], в которой дается общее доказательство положений Блейха.

Наиболее полно теоретически исследовал работу неразрезных балок при подвижной нагрузке в упруго-пластической стадии Л. И. Маламент [3]. Он получил результаты, весьма мало отличающиеся от результатов Г. Блейха, в частности для двухпролетной балки предельная нагрузка получилась на 3,8% меньше, чем у Блейха.

К. Г. Протасов исследовал работу ферм при подвижной нагрузке [4]. Он рассматривает и неразрезные балки, причем более простым способом получает результат, совпадающий с результатом Блейха.

В работе А. А. Гвоздева [5] также дано исследование работы двухпролетной балки при подвижной нагрузке и получено значение предельной нагрузки такое же, как и по теории Блейха.

Экспериментальные исследования по данному вопросу, судя по опубликованной литературе, отсутствуют. Это отмечено также в статье Лазара [6], в которой дан подробный перечень и краткий анализ экспериментальных исследований упруго-пластической работы разрезных и неразрезных балок, причем работы, выполненные в СССР, за исключением одной работы Е. О. Патона и Б. Н. Горбунова, в этом перечне отсутствуют.

В настоящей статье излагаются некоторые результаты экспериментальных исследований работы двухпролетных балок при подвижной нагрузке в упруго-пластической стадии, выполненных в Институте строительной механики АН УССР в 1951—1952 гг. Предварительно приводятся некоторые теоретические данные.

1. Изгиб двухпролетной балки прямоугольного сечения при подвижной нагрузке

При работе в упруго-пластической стадии, после образования пластических зон, балка становится как бы балкой переменного сечения. На протяжении зон текучести изменяется жесткость балки. Эту переменную жесткость легко определить, положив в основу расчета идеализированную диаграмму деформаций с неограниченной горизонтальной площадкой текучести.

Момент в каком-либо сечении балки в пределах зоны текучести выражается формулой [7]

$$M_x = \sigma_T T \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right). \quad (1)$$

Здесь σ_T — предел текучести,

$T = \frac{bh^2}{4}$ — пластический момент сопротивления,

$\alpha = \frac{2a}{h}$ — относительная высота упругого ядра (рис. 1).

Если предположить процесс изгиба неограниченно упругим, то в крайних волокнах сечения будут напряжения $\sigma_F > \sigma_T$ (рис. 1).

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_F = \frac{\sigma_T}{\alpha},$$

и соответствующий момент

$$M_F = \sigma_F W = \frac{\sigma_T W}{\alpha} = \frac{M_x}{\alpha}.$$

Приравнявая кривизну от действительного момента M_x кривизне, соответствующей приведенному моменту M_F , получим, как показано в нашей работе [9],

$$(EJ)_{пл} = EJ \cdot \frac{\alpha}{2} (3 - \alpha^2). \quad (2)$$

При $\alpha = 0$ $(EJ)_{пл} = 0$, что соответствует образованию пластического шарнира.

Приведенными моментами удобно пользоваться при исследовании упруго-пластической стадии работы балок, так как в таком случае можно рассматривать процесс изгиба как неограниченно упругий. Такой прием был предложен проф. С. А. Берштейном и использован В. С. Туркиным при исследовании работы балок при неподвижной нагрузке [8]. Нами распространен этот прием на расчет в случае подвижной нагрузки. Определение деформаций балок с использованием приведенных моментов имеется в указанной работе В. С. Туркина и в нашей статье [9].

В двухпролетной балке с равными пролетами при подвижном одностороннем грузе определенной величины сперва образуется пластический шарнир в сечении под грузом, причем в момент образования этого шарнира в опорном сечении балки пластические деформации еще отсутствуют. Это следует из решения приведенного ниже уравнения.

Пока не образовался пластический шарнир, балка один раз статически неопределима.

Для нахождения лишнего неизвестного используем условие равенства углов наклона касательной к изогнутой оси балки слева и справа от средней опоры

$$\varphi_{лев} = \varphi_{пр}. \quad (3)$$

На рис. 2 показана рассчитываемая балка. Положение груза определяется переменной абсциссой ηl . Предполагается, что груз движется от левой опоры к правой.

Величину нагрузки будем выражать через параметр m и величину предельного момента M_T . Имеем

$$M_T = \sigma_T T = \frac{Pl}{m},$$

откуда

$$P = \frac{m\sigma_T T}{l}. \quad (4)$$

Введение параметров m , η и α_0 исключает из уравнения P , σ_T , T и l , т. е. позволяет получить решение независимо от размеров балки и марки стали.

Здесь α_0 — относительная высота упругого ядра в сечении под грузом.

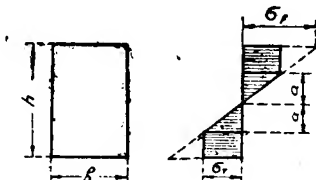


Рис. 1.

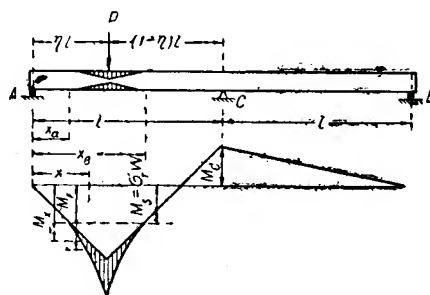


Рис. 2.

На рис. 2 показана приведенная эпюра моментов, отличающаяся от действительной заштрихованной частью на длине зон текучести.

При составлении выражений для угла поворота $\varphi_{лев}$ будем определять отдельно угол от M_x и угол $\Delta\varphi$ от $\Delta M = M_F - M_x$. После подстановки значений M_F и M_x получим

$$\Delta M = \frac{\sigma_T T}{3} \left(\frac{2}{\alpha} - 3 + \alpha^2 \right). \quad (5)$$

Пользуясь графоаналитическим методом для определения углов поворота, согласно рис. 2, получим уравнение (3) в следующем виде:

$$\frac{P\eta l(1-\eta)l}{l} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{(\eta l + l)}{3l} - \frac{M_c l}{3} + \Delta\varphi_{лев} = \frac{M_c l}{3}. \quad (3')$$

На основании простых геометрических соображений (рис. 2) выразим опорный момент M_c через m , η и α_0

$$M_c = \left\{ m(1-\eta) - \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{3} \right) \right\} \sigma_T T. \quad (6)$$

После подстановки этого значения M_c и значения P в (3') получим

$$m\eta(1-\eta^2) - 4m(1-\eta) + \frac{4}{\eta} \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{3} \right) + \frac{6}{\sigma_T T l} \Delta\varphi_{лев} = 0. \quad (3'')$$

Угол $\Delta\varphi_{лев} = \Delta\varphi'_{лев} + \Delta\varphi''_{лев}$ (соответственно двум участкам дополнительной эпюры моментов).

Пользуясь графоаналитическим методом, получим

$$\Delta\varphi_{лев} = \int_{x_a}^{\eta l} \frac{\Delta M x dx}{l} + \int_{\eta l}^{x_l} \frac{\Delta M x dx}{l}. \quad (7)$$

Пределы интегрирования x_a и x_b легко определяются из подобия треугольников (рис. 2)

$$x_a = \frac{2\eta l}{3-\alpha_0^2}; \quad x_b = \frac{(3m\eta-2)\eta l}{3m\eta-3+\alpha_0^2}. \quad (8)$$

При подстановке значений ΔM в (7) нужно учесть, что значения α в (5) будут разные для первого и второго интегралов.

По рис. 2 для левого участка

$$\frac{M_x}{\sigma_\tau T \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{3}\right)} = \frac{x}{\eta l}.$$

Так как

$$M_x = \sigma_\tau T \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right),$$

то после преобразований получим

$$\alpha = \sqrt{3 - (3 - \alpha_0^2) \frac{x}{\eta l}}. \quad (9)$$

Соответственно для правого участка получим

$$\alpha = \sqrt{3 - 3m\eta + (3m\eta - 3 + \alpha_0^2) \frac{x}{\eta l}}. \quad (10)$$

Выполнив интегрирование и подставив полученное по формуле (7) значение $\Delta \varphi_{\text{лев}}$ в (3''), получим уравнение в окончательном виде

$$\begin{aligned} & m\eta(1-\eta^2) - 4m(1-\eta) + \frac{4}{\eta} \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{3}\right) + \\ & + \frac{\eta^2}{(3-\alpha_0^2)^2 (3m\eta-3+\alpha_0^2)^2} [78m^2\eta^2 - 75m\eta + 216m\eta(1-m\eta)\alpha_0 + \\ & + 2m\eta(81m\eta-82)\alpha_0^2 + 24m\eta(m\eta-2)\alpha_0^3 + 18m\eta(5-3m\eta)\alpha_0^4 - \\ & - 8m\eta\alpha_0^5 + 6m\eta(m\eta-2)\alpha_0^6 + m\eta\alpha_0^8] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При заданном значении P , т. е. m , из этого уравнения можно определить α_0 при различных значениях η , т. е. при различных положениях груза P .

Уравнение (11), в которое α_0 входит в десятой степени (после освобождения от знаменателя), легко решается методом последовательных приближений.

Зная α_0 , вычисляем момент в сечении под грузом по уравнению (1) и опорный момент M_c — по уравнению (6). Производя вычисления при различных значениях η , можно построить линии влияния пролетного и опорного моментов.

Уравнение (11) имеет следующие пределы применимости: 1) $\alpha_0 = 1$, т. е. балка работает еще полностью в пределах упругости. В этом случае уравнение имеет вид

$$3m\eta^2(1-\eta^2) - 12m\eta(1-\eta) + 8 = 0. \quad (12)$$

2) $\alpha_0 = 0$, что соответствует образованию пластического шарнира в сечении под грузом. В этом случае балка становится статически определенной. Уравнение (11) имеет вид

$$\begin{aligned} & -27m^3\eta^6 + 80m^2\eta^5 + (135m^3 - 52m)\eta^4 - \\ & - (270m^2 + 108m^3)\eta^3 + (324m^2 + 135m)\eta^2 - 324m\eta + 108 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) можно, конечно, получить независимо от уравнения (11).

Рассмотрим предельное состояние балки, соответствующее выравниванию пролетного и опорного моментов, т. е. образованию второго пластического шарнира (в опорном сечении).

Согласно рис. 3

$$P\eta(1-\eta)l = \eta\sigma_r T + \sigma_r T.$$

Выражая на основании (4) P через m , получим

$$m\eta(1-\eta) = 1 + \eta. \quad (14)$$

Продифференцировав это уравнение по η и приравняв нулю $\frac{dm}{d\eta}$, найдем $\eta = 0,4142$ и затем из (12) найдем $m = 5,8284 \approx 5,83$. Тот же результат несколько иным путем А. А. Гвоздев [5].

Таким образом, предельная нагрузка, на основании (4), равна

$$P_r = \frac{5,83\sigma_r T}{l}$$

и предельный момент

$$M_r = \sigma_r T = \frac{P_r l}{5,83}.$$

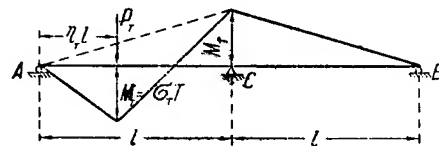


Рис. 3.

Подставив $m = 5,83$ в уравнение (12), получим предельное значение $\eta = 0,1385$, при котором балка работает еще упруго при движении предельного груза слева направо. Вторым положительным корнем уравнения (12) $\eta = 0,775$ соответствует пределу упругой работы балки при движении предельного груза влево от средней опоры C к опоре A .

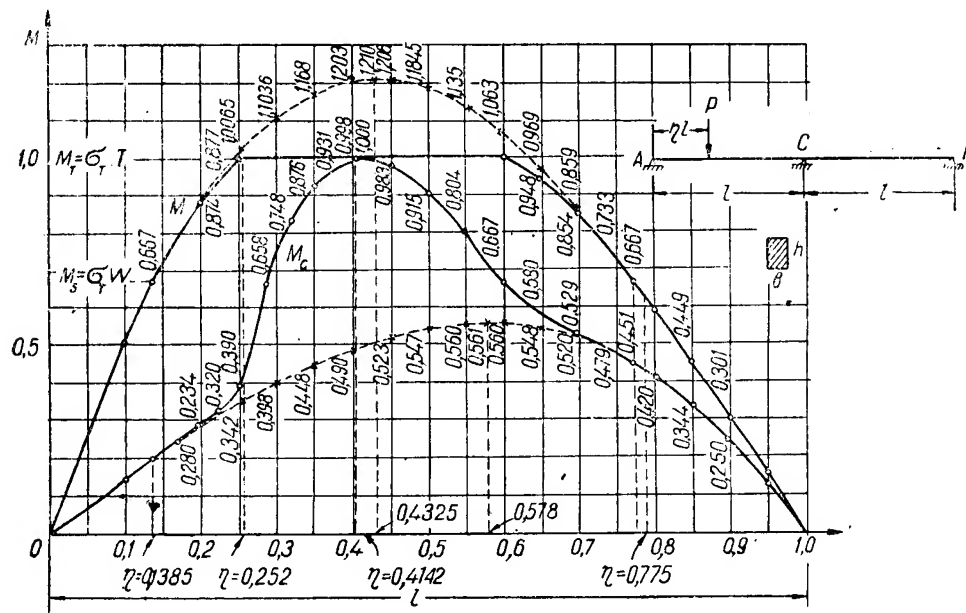


Рис. 4.

Подставив $m = 5,83$ в уравнение (13) и решив его методом последовательных приближений, получим $\eta = 0,252$, что соответствует положению предельного груза, при котором образуется в балке первый пластический шарнир. Второе положительное решение $\eta = 0,600$ соответ-

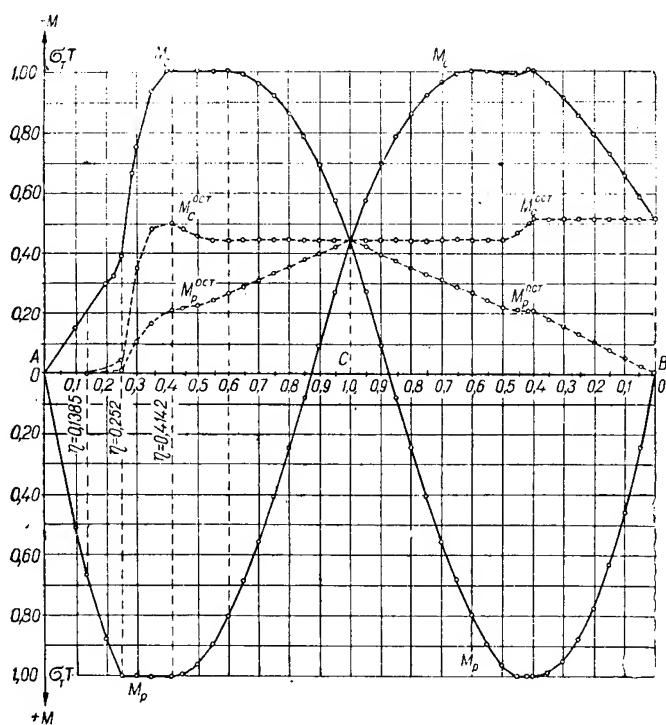


Рис. 5.

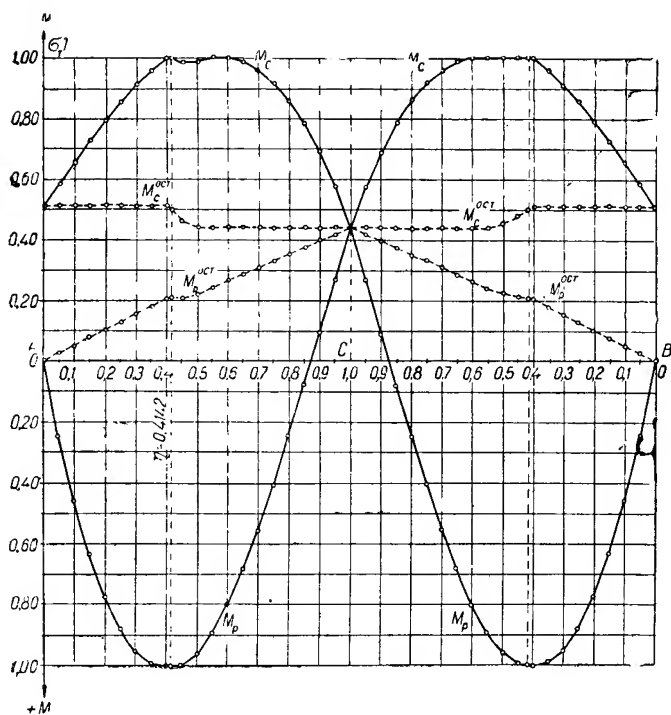


Рис. 6.

ствует образованию первого пластического шарнира при движении груза от C к A .

Для значений $0,252 > \eta > 0,1385$ при известном m по уравнению (11) определяем α_0 и вычисляем пролетный и опорный моменты по формулам (1) и (6).

На рис. 4 построены при $m = 5,83$ линия влияния опорного момента и огибающая линия пролетных моментов при движении груза в левом пролете. При построении этих линий не учтены остаточные моменты, которые получаются в балке вследствие образования пластических деформаций. Остаточные моменты существенно изменяют вид линий влияния моментов. Не останавливаясь на определении остаточных моментов, отметим, что вычисление их производилось в предположении полной разгрузки балки после нагружения в каком-либо сечении, причем полагалось, что разгрузка происходит по линейному закону. При повторном нагружении, после перемещения груза в следующие положения, также предполагалось, что процесс деформации удовлетворяет линейному закону. Таким образом, остаточные моменты повторного нагружения вычислялись по формулам упругой работы балки. Если при этом один из моментов — пролетный или опорный — оказывается больше, чем $M_T = \sigma_T T$, то, очевидно, такой момент нужно считать равным M_T и сделать соответствующий пересчет для второго момента. На рис. 5 построены линия влияния опорного момента M_c и огибающая линия M_p с учетом остаточных моментов при первом проходе груза слева направо. Там же отдельно начерчены линии остаточных моментов. Положительные моменты, в отличие от рис. 4, отложены вниз.

При втором движении груза (справа налево) линии M_c и M_p имеют вид, показанный на рис. 6. Легко убедиться, что дальнейшие повторные перемещения груза слева направо и в обратном направлении не дадут новых остаточных моментов и вид линий M_c и M_p останется прежний. При всех движениях груза справа налево линии влияния моментов в точности будут совпадать с изображенными на рис. 6, а при движении слева направо — с зеркальными изображениями этих линий.

Приведенные здесь данные для предельного состояния остаются в силе, очевидно, и для двутаврового сечения. Для упруго-пластического состояния основные уравнения будут иметь более сложный вид, чем для балок прямоугольного сечения. Эти уравнения получены нами, но здесь не приводятся.

2. Результаты опытов с двухпролетными балками прямоугольного сечения *

Кроме основных испытаний при подвижной нагрузке, были произведены также испытания при неподвижной статической нагрузке и при повторной нагрузке, что дало возможность сравнить несущую способность балок при разных условиях работы.

Все опытные балки, как прямоугольного, так и двутаврового сечений, изготовлены из одного куска листовой стали толщиной 30 мм. Балки прямоугольного сечения имеют размеры сечения 20×30 мм. Для двухпролетных балок каждый пролет равен 500 мм. Испытания производились на специальной машине, сконструированной и изготовленной в Институте строительной механики АН УССР. Размеры опытных балок назначались в соответствии с размерами и мощностью машины. На этой машине возможно осуществлять статическую, повторную и подвижную нагрузки как в одном пролете, так и в обоих пролетах одновременно или неодновременно. Максимальная нагрузка в одном пролете составляет 2 т.

* Все опыты, описанные в настоящей статье, выполнены младшим научным сотрудником В. В. Трофимовичем под руководством автора.

Для определения механических характеристик стали из листа были вырезаны 12 пропорциональных образцов $d = 10$ мм, которые испытывались на разрыв. Девять образцов были вырезаны в средней части листа, а три — у края листа. Как видно из табл. 1, механические характеристики образцов, вырезанных в середине и у края листа, оказались существенно различными. Аналогичное явление наблюдалось нами и раньше [10].

Таблица 1

Место вырезки образцов	σ_T (кг/см ²)	$\sigma_{пр}$ (кг/см ²)	ε %	ψ %	σ_p^{Φ} (кг/см ²)	σ_p^L (кг/см ²)	Примечание
В середине листа	2150	4070	26,8	58,4	3200	7850	Среднее для девяти образцов
У края листа	1790	3433	35,5	72,6	2277	8327	Среднее для трех образцов

На рис. 7 показаны диаграммы деформаций, построенные по средним данным испытаний на разрыв. Длина площадки текучести колебалась для различных образцов в пределах 1,0—1,5%, в среднем 1,3%.

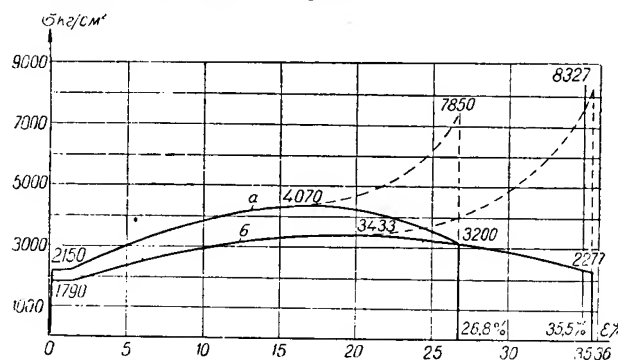


Рис. 7.

Предел текучести определялся также из опытов на изгиб. С этой целью испытаны две однопролетные балки с пролетом в 500 мм с сосредоточенной силой, приложенной посередине пролета. Предел текучести вычислялся по формуле

$$\sigma_T = \frac{M_T}{T},$$

где $T = \frac{bh^3}{4}$ и $M_T = \frac{P_T l}{4}$ — предельный момент.

Из опытов получены для σ_T значения, равные 2180 кг/см² и 2120 кг/см²; среднее значение 2150 кг/см². Точное совпадение со средним результатом испытаний на растяжение является, конечно, случайностью.

Испытание двухпролетных балок статической нагрузкой

Испытаны две балки (№ 4 и 13). Балка № 4 вырезана у края листа, № 13 — из середины его. Балки нагружались сосредоточенной силой в одном из пролетов, в середине пролета (№ 4) и на расстоянии 0,4142 l от крайней опоры (№ 13). Во время опытов с помощью опор

динамометров измерялись все три опорные реакции. Средняя опора — неподвижная, крайние опоры подвижные. Нагрузочное приспособление также имеет динамометр с индикатором. Таким образом, во время опытов была возможность сопоставлять величину нагрузки с суммой реакций. Точность измерений оказалась достаточно высокой: сумма измеренных реакций отличалась от величины нагрузки не более чем на 1—2%, если не считать первых ступеней нагрузки, когда ошибка доходила до 4%.

Прогибы измерялись индикаторами, а удлинения крайних волокон — рычажными тензометрами.

Опытные диаграммы для балки № 4, которые здесь не приводятся, показали следующее.

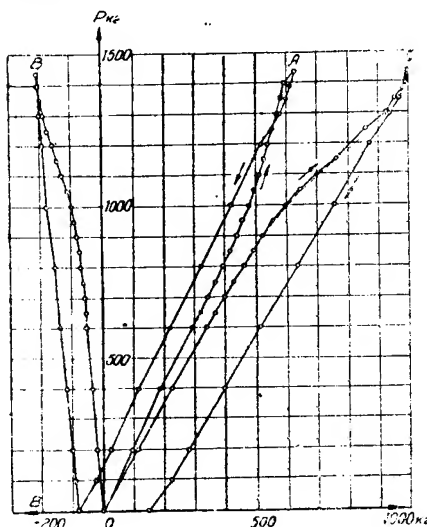


Рис. 8.

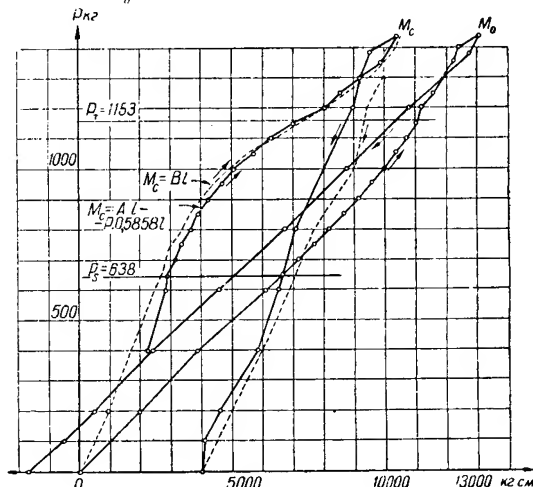
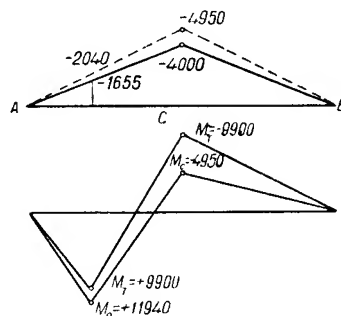


Рис. 9.

В пределах упругости опытные и теоретические диаграммы согласуются достаточно хорошо. Теоретически при предельной нагрузке должно произойти выравнивание пролетного и опорного моментов. Практически выравнивание моментов не наблюдается, как это неоднократно подтверждалось опытами других исследователей. Имеется только тенденция к выравниванию, выражающаяся в замедлении роста пролетного момента и ускорении роста опорного момента.

Теоретическая предельная нагрузка для балки № 4, вычисленная при среднем значении $\sigma_T = 2150 \text{ кг/см}^2$, оказалась равной

$$P_T = \frac{6\sigma_T T}{l} = 1195 \text{ кг.}$$

Опытные диаграммы моментов не дают возможности отметить какие-либо характерные точки, соответствующие предельному состоянию. Диаграммы же прогибов ясно указывают на резкое возрастание прогибов при нагрузках, превышающих $P = 1100 \text{ кг}$, что меньше теоретической предельной нагрузки на 8%. Необходимо учесть, что балка № 4 вырезана у края листа, где σ_T , как указано выше, меньше 2150 кг/см^2 . Если принять $\sigma_T = 1790 \text{ кг/см}^2$ (для образцов, вырезанных у края листа), то опытная предельная нагрузка будет на 9% больше теоретической.

Данные испытаний балки № 13 приведены на рис. 8, 9 и 10. Кроме диаграмм нагрузки, даны также диаграммы разгрузки. Теоретическая предельная нагрузка, равная $P_T = 1153 \text{ кг}$, меньше, чем для балки № 4, так как нагрузка приложена не посередине пролета, а в самом невыгодном положении, на расстоянии $0,4142 l$ от крайней опоры. Как и для балки № 4, наблюдается тенденция к выравниванию моментов (рис. 9). На том же рис. 9 вверху показаны опытная и теоретическая эпюры остаточных моментов. Опытные остаточные моменты меньше теоретических.

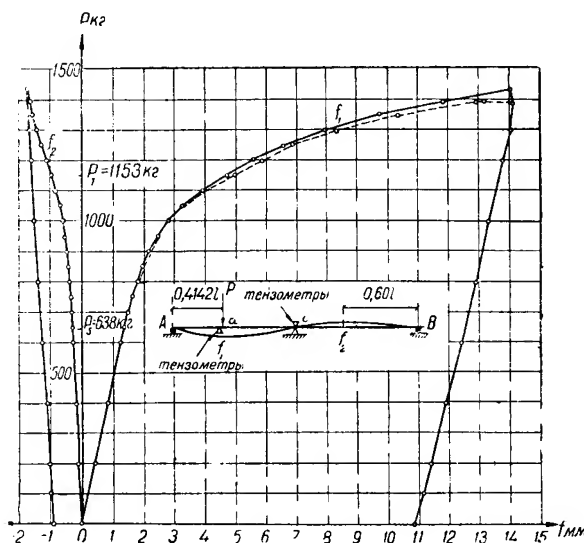


Рис. 10.

Диаграммы прогибов и относительных удлинений (рис. 10) не имеют таких резких изломов, как диаграммы для балки № 4. Поэтому установить по этим диаграммам величину опытной предельной нагрузки не представляется возможным.

Испытания балок № 4 и 13 статической нагрузкой показали, как и ряд других исследований, что выравнивание моментов не наблюдается, что объясняется отличием свойств реального материала от свойств идеализированного, диаграмма деформаций которого имеет неограниченную площадку текучести. Существенное влияние оказывает упрочнение после прохождения площадки текучести. Наличием упрочнения объясняется также существенное расхождение в опытных и теоретических значениях остаточных моментов (рис. 9). Опыты с неразрезными балками не дают возможности определить величину предельной нагрузки в отличие от однопролетных балок, где опытные предельные нагрузки устанавливаются достаточно точно. Это отмечалось в нашей статье [10]. Во всяком случае, теоретические предельные нагрузки во время опытов были достигнуты без значительных деформаций и наибольшее сближение пролетного и опорного моментов происходило при нагрузках, больших, чем теоретические предельные нагрузки.

Испытания двухпролетных балок повторной нагрузкой

Испытаны две балки, № 9 и 10. Обе балки вырезаны из средины листа. Нагрузка прикладывалась в одном из пролетов, на расстоянии $0,4142 l$ от крайней опоры. Балка № 9 испытывалась только под действием предельной нагрузки, определенной теоретически. При испытании

балки № 10 производилось последовательное нагружение возрастающими нагрузками различной величины, причем каждая из них была больше нагрузки, соответствующей предельному упругому состоянию балки.

Во время опытов, как и раньше, измерялись реакции, прогибы и удлинения волокон.

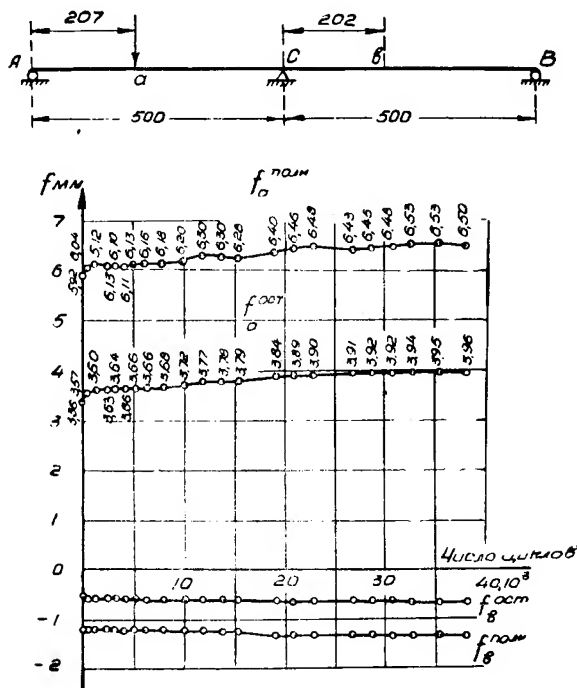


Рис. 11.

На рис. 11 показаны результаты опытов с балкой № 9. Теоретическая предельная нагрузка равна

$$P_T = \frac{5,83\sigma_T T}{l} = 1105 \text{ кг.}$$

При повторном приложении этой нагрузки прогиб в сечении под силой сперва заметно возрастал, а затем, после 25 000 повторений, как полный, так и остаточный прогибы стабилизировались. Аналогичная картина получилась и для удлинений крайних нижних волокон в том же сечении. Опыт был прекращен после 38 300 повторений нагрузки. Полное возрастание прогиба составило 0,58 мм, или 0,97% от прогиба при первом нагружении. Для остаточного прогиба — соответственно 0,60 мм, или 1,79%. Относительное удлинение увеличилось на 0,125%, или на 0,93% по отношению к удлинению при первом нагружении, а остаточное удлинение — на 0,14%, или на 1,23% по отношению к первоначальному остаточному удлинению. Были также построены диаграммы удлинений, реакций и моментов, которые здесь не приводятся. Все эти диаграммы аналогичны диаграммам при однократном приложении нагрузки.

На рис. 12 и 13 показаны результаты опыта с балкой № 10. Теоретическая предельная нагрузка $P_T = 1120 \text{ кг}$. Нагрузка, соответствующая пределу упругой работы балки, $P_s = 620 \text{ кг}$.

Первая ступень нагрузки $P = 900 \text{ кг} > P_s$. Как показывают диаграммы, при каждой ступени нагрузки, в том числе и при предельной

нагрузке, после 20 000—25 000 повторений наблюдалась ясно выраженная стабилизация деформаций. После 114 000 повторений нагрузка была увеличена до 1200 кг, что больше предельной нагрузки на 7,1%. При этой нагрузке также началась стабилизация деформаций после 150 000 повторений нагрузки, но затем деформации начали сильно возрастать,

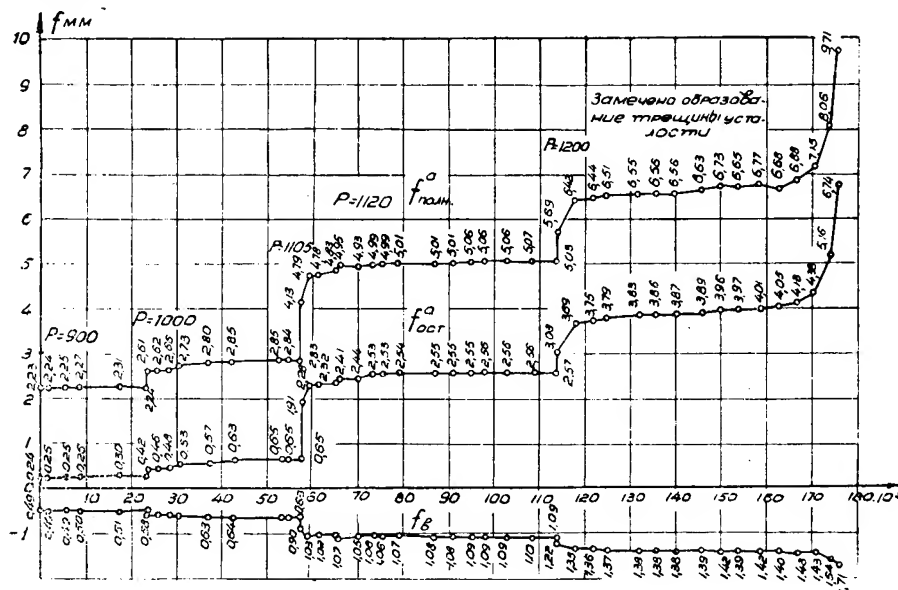


Рис. 12.

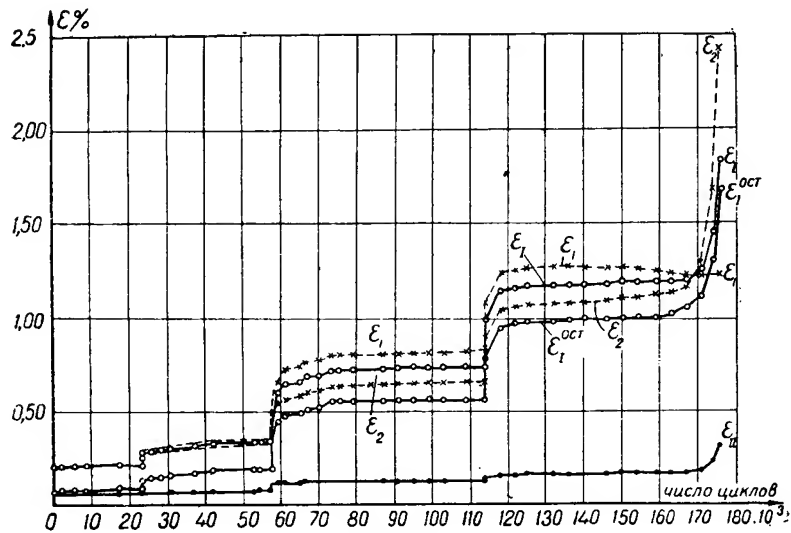


Рис. 13.

и после 171 000 повторений в балке образовалась трещина у одного нижнего ребра, вблизи сечения, в котором прикладывалась нагрузка.

Образование трещины объясняется усталостью металла. Трещина усталости получилась при сравнительно небольшом числе повторений нагрузки, но при весьма значительной нагрузке, превышающей статическую предельную нагрузку. На рис. 14 и 15 показан внешний вид трещины, а на рис. 16 — сечение образца в изломе. В левом нижнем углу ясно видна зона трещины с мелкозернистой структурой. В остальной части сечения структура крупнозернистая, не свойственная мягкой

строительной стали. До полного излома балка была доведена статическим изгибом. Статический излом той же балки в месте, удаленном от места трещины, показал хорошую мелкозернистую структуру. Чтобы сломать балку, пришлось сделать два надреза. Еще один излом, сделанный вблизи места трещины, показал крупнозернистую структуру. Таким

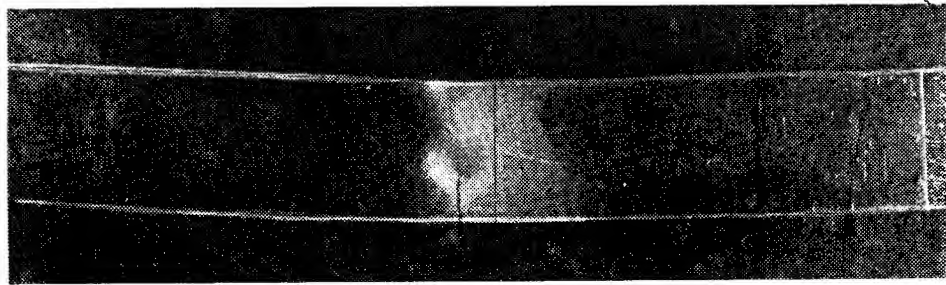


Рис. 14.

образом, лист стали, из которого изготовлены опытные балки, имеет весьма неравномерную структуру.

Испытания балок повторной нагрузкой показали, что при теоретической предельной нагрузке пластические деформации затухают довольно быстро и величина как полного, так и остаточного прогиба сравнительно невелика.

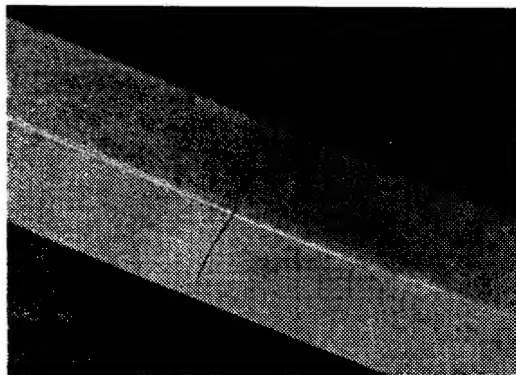


Рис. 15.

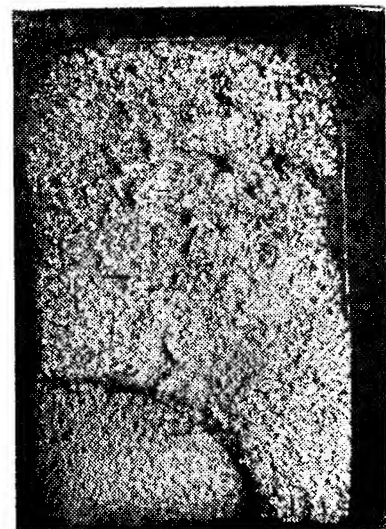


Рис. 16.

Испытания двухпролетных балок подвижной нагрузкой

Испытания производились одиночным грузом, который перемещался по балке слева направо и в обратном направлении. Машина для испытаний сконструирована так, что груз перемещается по балке непрерывно, а как бы скачкообразно, т. е. после нагружения в одном сечении груз приподнимается и в приподнятом состоянии перемещается в следующее сечение. При автоматическом перемещении груза интервалы нагружения составляют 1,4 мм, при этом скорость перемещения груза равна около 13 мм/мин. При перемещении груза вручную интервалы могут быть любые. Так как при каждом положении груза необходимо было производить отсчеты по приборам, на что требовалось некоторое

время, то нагрузка в каждом сечении прикладывалась несколько (до 20) раз.

Во время опытов, как и при испытаниях балок под действием статической и повторной нагрузок, измерялись опорные реакции и прогибы. Разгрузка после каждого нагружения позволяла измерять остаточные реакции и прогибы.

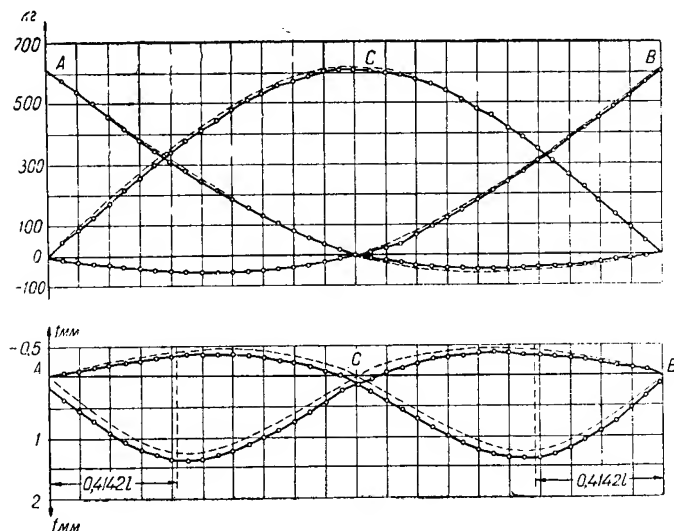


Рис. 17.

Испытаны две балки, № 5 и 7, при интервалах нагружения через 25 мм и одна балка (№ 6) — при интервалах 1,4 мм. Балка № 5 испытывалась при четырех ступенях нагружки:

$P_s = 618 \text{ кг}$, $m = 3,21$ (предел упругой работы балки);

$P = 964 \text{ кг}$, $m = 5,00$;

$P_r = 1125 \text{ кг}$, $m = 5,83$ (предельная нагрузка);

$P = 1300 \text{ кг} = 1,155 P_r$.

При $P_s = 618 \text{ кг}$ балка испытывалась только при одном прохождении груза слева направо. На рис. 17 приведены опытные и теоретические линии влияния реакций и прогибов. Опытные линии влияния прогибов имеют несколько большие ординаты по сравнению с теоретическими (примерно на 0,2 мм), а также имеются опорные ординаты, что объясняется упругой осадкой опординамометров. Если исключить влияние осадки опор, то совпадение опытных и теоретических линий влияния будет очень хорошее. Вполне хорошее совпадение получилось и для линий влияния опорных реакций, кроме правой ветви реакции А, где при малом абсолютном расхождении относительная ошибка сравнительно велика.

Необходимо отметить, что эти линии влияния, как и все последующие, отличаются от обычных линий влияния тем, что они построены для нагрузки, не равной единице.

Были также построены опытные и теоретические линии влияния опорного и пролетных моментов в сечениях $0,4142 l$, а также огибающая линия пролетных моментов. Здесь также получилось достаточно хорошее совпадение опытных и теоретических линий, если не учитывать расхождения для правой ветви опорного момента, что находится в соответствии с указанным выше расхождением для правой ветви реакции А.

Испытание при нагрузке, соответствующей пределу упругой работы балки, произведено с целью проверки методики испытания и выяснения, в какой мере опытные данные согласуются с теоретическими. Резуль-

таты испытания, как описано выше, показали достаточно хорошее совпадение опытных и теоретических данных.

При следующей ступени нагрузки ($P = 964 \text{ кг}$) испытание сделано при 10 проходах нагрузки (пять полных циклов). При этой нагрузке в балке уже наблюдались пластические деформации. Линии влияния для прогибов, реакций и моментов, построенные для последнего

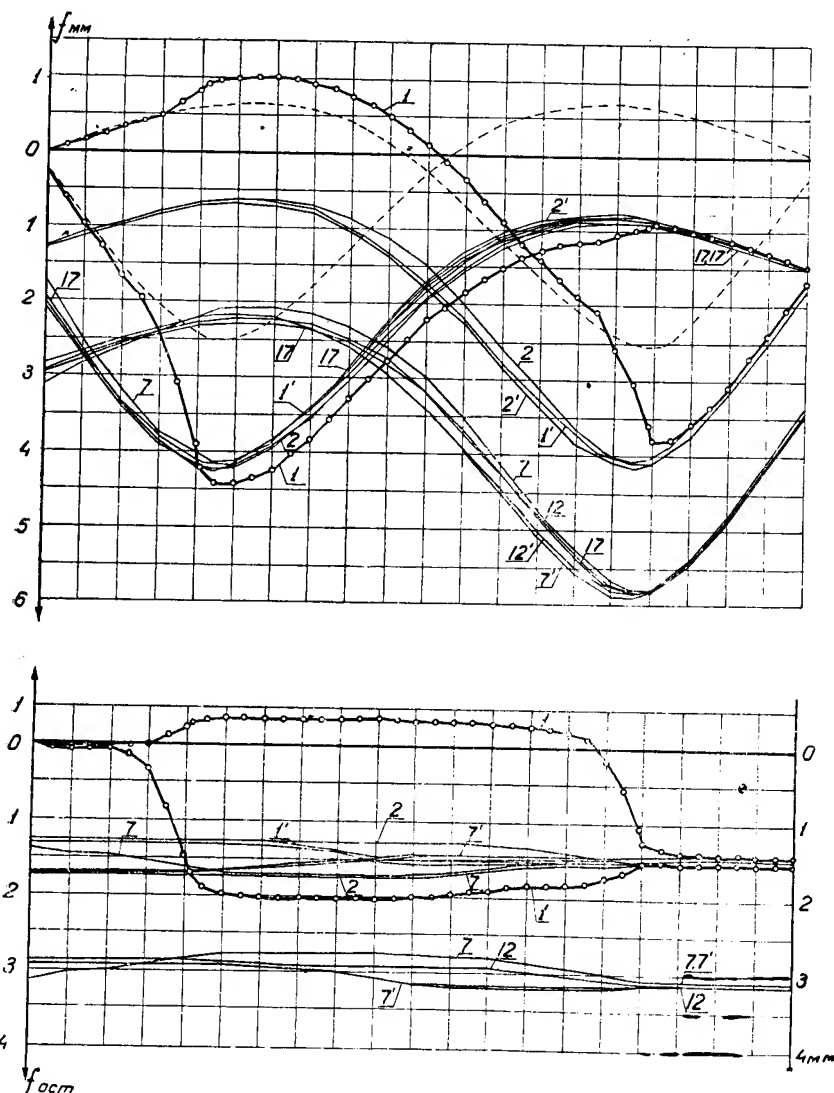


Рис. 18.

цикла нагрузки, которые здесь не приводятся, имеют почти такой же вид, как и при предыдущей нагрузке, что объясняется как относительно небольшой величиной пластических деформаций, так и нагружением на протяжении восьми предыдущих проходов нагрузки.

Картина резко изменилась при первом прохождении теоретической предельной нагрузки $P_T = 1125 \text{ кг}$. При этой нагрузке, как показано выше, при $\eta = 0,252$ теоретически образуется полный пластический шарнир в сечении под грузом, а при $\eta = 0,4142$ такой же шарнир образуется и в опорном сечении, что соответствует предельному состоянию балки.

На рис. 18 показаны опытные линии влияния прогибов в сечениях 0,4142 l от крайних опор для левого и правого пролетов. На верхнем рисунке даны полные прогибы, на нижнем — остаточные. Утолщенными линиями показаны линии влияния при первом прохождении груза слева направо. В верхней части пунктиром показана линия влияния упругой части прогиба при первом прохождении груза, полученная как разность измеренных опытным путем полных и остаточных прогибов. Как видно, эти линии получались такими, какими они должны быть при упругой работе балки; их ординаты для прогибов в левом и правом пролетах почти совпадают, что свидетельствует о достаточной степени точности измерений деформаций на протяжении опыта.

Максимальный прогиб в левом пролете получился 4,5 мм, причем упругая часть прогиба составляла 2,5 мм, а остаточная — 2,0 мм. В правом пролете упругий прогиб такой же, как и в левом, а полный и остаточный — меньше. Это объясняется тем, что при образовании в левом пролете пластических деформаций, в правом пролете получился отрицательный остаточный упругий прогиб, уменьшивший полный прогиб при нагружении в правом пролете. Остаточный упругий прогиб в балке имеет место, конечно, только до тех пор, пока балка закреплена на опорах.

После первого прохождения груза слева направо балка нагружалась той же подвижной нагрузкой еще 33 раза. Таким образом, всего было 17 циклов нагружений, считая одним циклом полное прохождение груза слева направо и в обратном направлении (на рис. 18 линии влияния, относящиеся к движениям груза справа налево, отмечены цифрами со штрихом).

Уже при первом обратном прохождении груза линии влияния прогибов (l') в обоих пролетах резко изменили свой вид по сравнению с первым прямым прохождением и стали такими же, как при упругой работе балки, но сдвинутыми относительно последних на величину остаточного прогиба. Если отсчитывать ординаты линий влияния от линий, соединяющих вершины опорных ординат, то разница ординат линий l' и линий упругих прогибов составляет всего лишь 2—4 %.

Последующие прохождения груза не изменили картину, т. е. линии влияния прогибов сохранили вид линий влияния при упругой работе балки, но с небольшими колебаниями в величинах ординат, причем эти колебания постепенно уменьшались, что говорит о быстром затухании нарастания остаточных деформаций.

При шестом прохождении нагрузки была допущена случайная перегрузка, когда груз находился в правом пролете. При этом прохождении прогибы не измерялись. При следующем, седьмом прохождении нагрузки измерение прогибов показало возрастание их в правом пролете (рис. 18), вызванное упомянутой перегрузкой. Последующие прохождения нагрузки также, как и седьмое, несмотря на ранее допущенную перегрузку, показали, что линии влияния прогибов сохраняют вид линий влияния при упругой работе балки.

На рис. 19 показаны опытные линии влияния опорного и пролетных моментов (M_c и M_{η}) и огибающая пролетных моментов (M_p) при прохождении l и l' предельной нагрузки. Выравнивание моментов, также как и при статической нагрузке, не происходит. Опорный момент несколько меньше предельного, а пролетный — несколько больше. При обратном прохождении (l') линии влияния моментов уже приобрели вид такой же, как при упругой работе, но с опорными ординатами, соответствующими остаточным моментам.

При последующих прохождениях такой вид линий влияния моментов сохранился (рис. 20; здесь изображены лишь линии влияния для нескольких прохождений, чтобы не затемнять рисунок). Сопоставление

опытных линий влияния моментов с теоретическими (рис. 5 и 6) показывает удовлетворительное согласование их в качественном отношении. Опытные остаточные моменты получились заметно меньше теоретических, как это имело место и при испытании статической нагрузкой (рис. 9).

После испытания теоретической предельной нагрузкой испытание продолжалось при нагрузке $P = 1300$ кг, которая на 15,5% выше предельной нагрузки. При первом нагружении прогибы резко возросли,

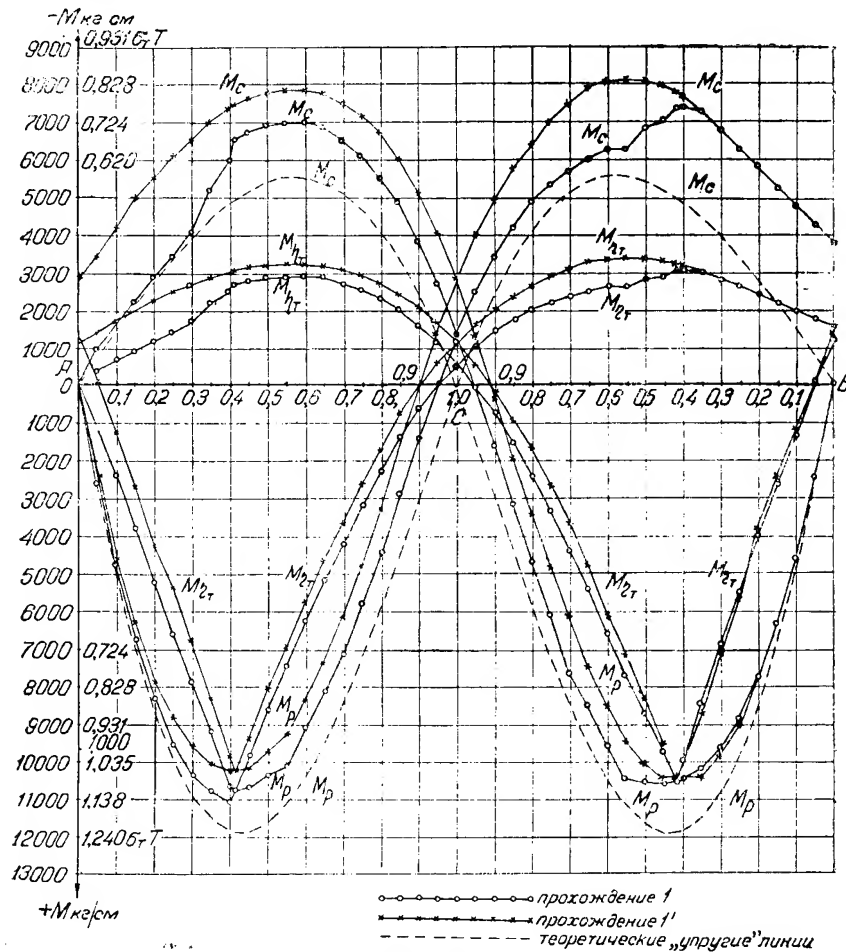


Рис. 19.

а при последующих проходах наметилась стабилизация прогибов, и линии влияния прогибов опять приобрели вид линий влияния при упругой работе.

На рис. 21 показано изменение максимальных прогибов обоих пролетов в зависимости от числа циклов нагрузки. На этом рисунке не учтены первые 10 проходов при нагрузке 964 кг, после которых машина была остановлена на несколько дней для ремонта.

Вторая балка, № 7, была испытана сразу под действием предельной теоретической нагрузки, равной 1120 кг. Характер линий влияния прогибов при первом прохождении нагрузки такой же, как для балки № 5, но величины полного и остаточного прогибов значительно больше. Полный прогиб в левом пролете составлял 10,5 мм вместо 4,5 мм для балки № 5, а остаточный — 8,0 мм вместо 2,0 мм. Упругие части прогибов

для обеих балок одинаковые. Такое различие в величинах прогибов для одинаковых балок при одинаковой нагрузке следует объяснить тем, что балка № 5 до нагружения предельной нагрузкой подвергалась „тренировке“ — обкатке меньшей нагрузкой, но также дающей пластические деформации, а балка № 7 сразу нагружалась предельной нагрузкой.

При последующих прохождении предельной нагрузки прогибы быстро стабилизировались и линии влияния прогибов получили вид „упругих“ линий влияния.

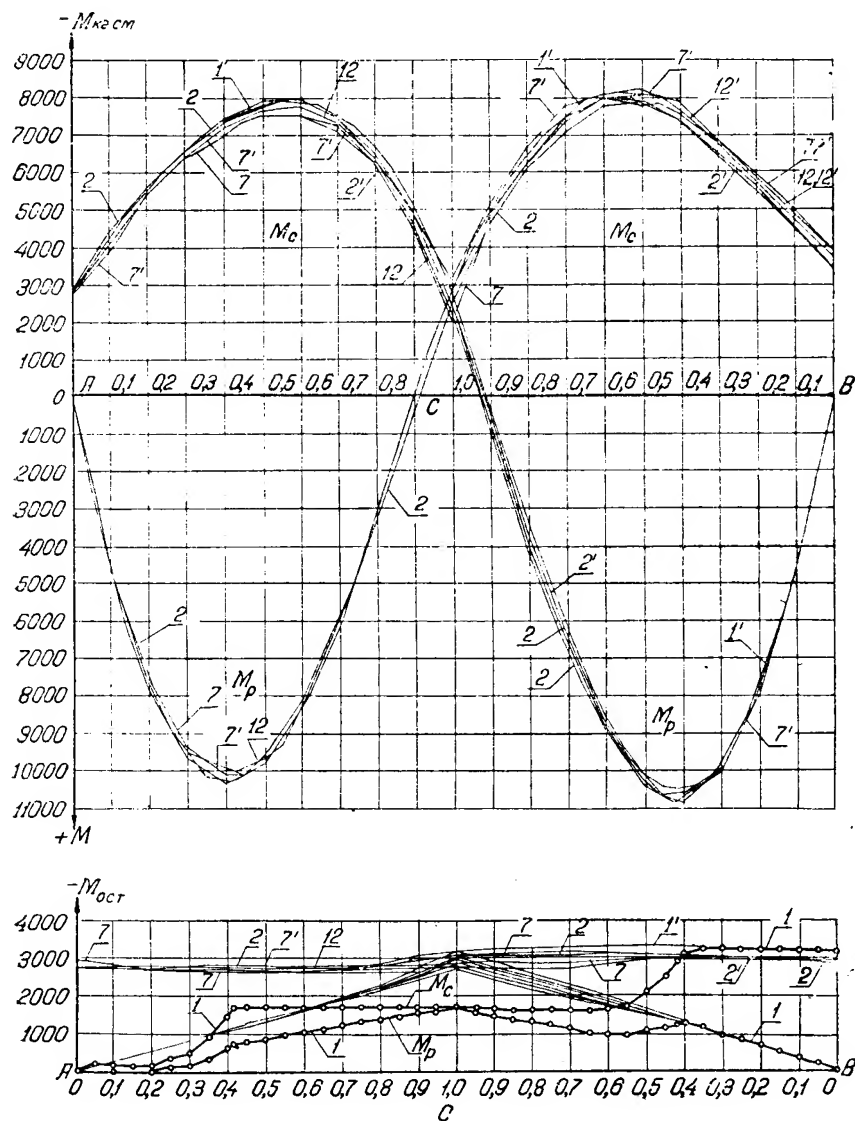


Рис. 20.

Стабилизация прогибов наблюдалась и при дальнейшем испытании увеличенной нагрузкой в 1200 кг, что составляет 1,07 предельной нагрузки.

На рис. 22 показано изменение полных и остаточных прогибов для обоих пролетов в зависимости от числа циклов нагрузки. Все кривые ясно показывают быстрое затухание нарастания прогибов даже при нагрузке, большей предельной теоретической нагрузки.

Балка № 6 также испытывалась сразу предельной нагрузкой. Более частое нагружение (через 1,4 мм) привело к более медленной стабилизации деформаций — после 25 прохождений нагрузки вместо 3—5 прохождений при нагружении через 25 мм.

Испытания двухпролетных балок прямоугольного сечения показали следующее.

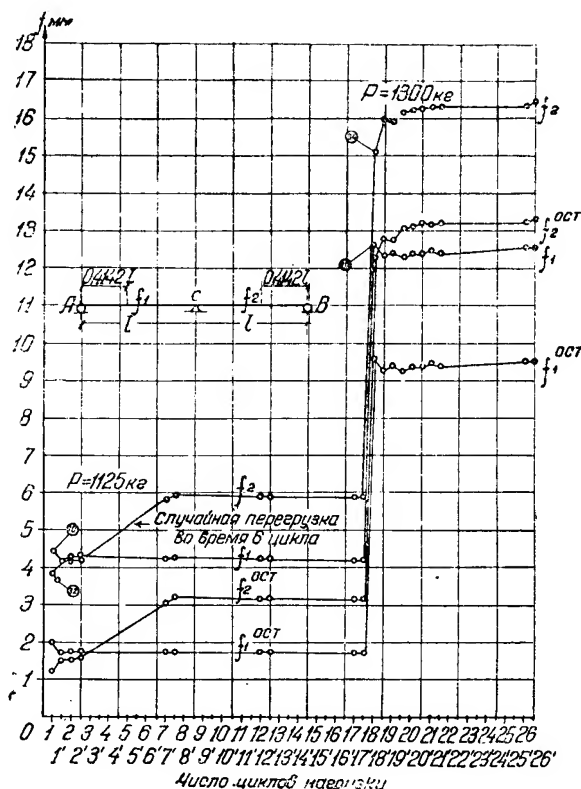


Рис. 21.

1. При статическом нагружении выравнивание моментов не происходит. При переходе за предел упругой работы балки возрастание пролетного момента замедляется, а опорного — ускоряется. Моменты наименее отличаются друг от друга при нагрузке, превышающей теоретическую предельную нагрузку.

Диаграммы деформаций (прогибов и удлинений крайних волокон) не имеют резких изломов при теоретической предельной нагрузке. На протяжении всего процесса упруго-пластической деформации диаграммы имеют плавный характер, затрудняющий определение предельного состояния балки.

2. При повторной нагрузке, превышающей нагрузку предела упругой работы балки, происходит затухание пластических деформаций, и балка дальше работает как упругая. Затухание деформаций происходит не только при теоретической предельной нагрузке при статическом нагружении, но и при несколько большей нагрузке. Предварительное нагружение повторной нагрузкой меньше предельной „тренирует“ балку и при последующем нагружении предельной повторной нагрузкой уменьшает прогибы балки по сравнению с прогибами при повторном нагружении балки сразу предельной нагрузкой. При предварительной трени-

рующей нагрузке балки № 10 полный и остаточный прогибы после 114 000 повторений нагрузки (из них около 56 000 при предельной нагрузке) составили 5,03 мм и 2,57 мм. Для балки № 9, которая испытывалась сразу предельной нагрузкой, после 38 300 повторений нагрузки прогибы составили 6,50 мм и 3,96 мм. Таким образом, для балки № 10 прогибы меньше на 23% и на 35%.

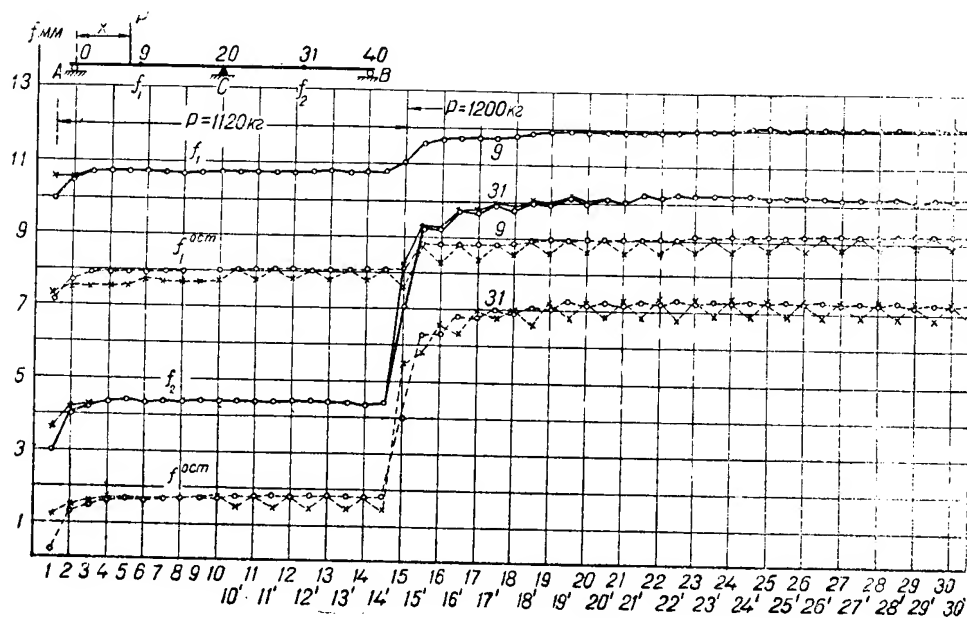


Рис. 22.

3. При подвижной нагрузке, равной теоретической предельной нагрузке при однократном статическом нагружении, уже при втором прохождении нагрузки балка работает как упругая. Последующие прохождения нагрузки увеличивают остаточные деформации незначительно, и после небольшого числа прохождений нагрузки нарастание остаточных деформаций прекращается. При нагрузке, несколько превышающей теоретическую предельную нагрузку, также происходит быстрое затухание остаточных деформаций, и при повторных прохождениях нагрузки балка работает как упругая.

Предварительная тренировка балки повторными прохождением нагрузки меньше предельной нагрузки значительно снижает полные и остаточные деформации балки, как и при испытании повторной нагрузкой, прикладываемой в одном и том же месте.

3. Результаты опытов с балками двутаврового сечения

На рис. 23 показано сечение опытных двутавровых балок. Размеры сечений отдельных балок имели небольшие отклонения от размеров, приведенных на рис. 23.

Так же как и балки прямоугольного сечения, двутавровые балки испытывались статической (однопролетные и двухпролетные балки), повторной и подвижной нагрузками.

Испытания двухпролетных балок статической сосредоточенной нагрузкой в одном из пролетов не показали каких-либо особенностей по сравнению с испытаниями балок прямоугольного сечения.

Диаграммы деформаций не имеют резких изломов, которые позво-

лили бы определить предельную нагрузку. Выравнивание моментов также не происходит. Моменты наименее отличаются друг от друга при нагрузке, несколько большей, чем теоретическая предельная нагрузка.

Испытания повторной нагрузкой дали такие же результаты, как и испытания балок прямоугольного сечения. Испытаны две балки (№ 8 и 9). Балка № 8 сразу испытывалась нагрузкой $P_T = 1300$ кг, равной теоретической предельной нагрузке. Нагрузка прикладывалась в правом пролете, на расстоянии 0,4142 l от крайней опоры.

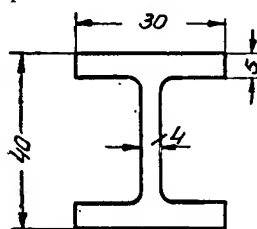


Рис. 23.

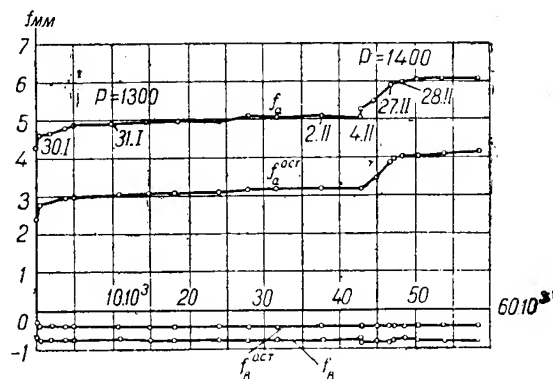


Рис. 24.

На рис. 24 приведены диаграммы прогибов в зависимости от числа повторений нагрузки. Эти диаграммы ясно показывают стабилизацию деформаций после 15 000 повторений нагрузки. После 25 000 повторений была случайно допущена небольшая перегрузка, но деформации опять быстро стабилизировались. Далее нагрузка была увеличена до 1400 кг, что составляет 1,07 от теоретической предельной нагрузки. Опыт был прекращен после 58 500 повторений нагрузки, хотя полная стабилизация деформаций еще не наступила. При предельной нагрузке $P_T = 1300$ кг, после 43 000 повторений нагрузки, полный прогиб получился 5,03 мм и остаточный 3,14 мм.

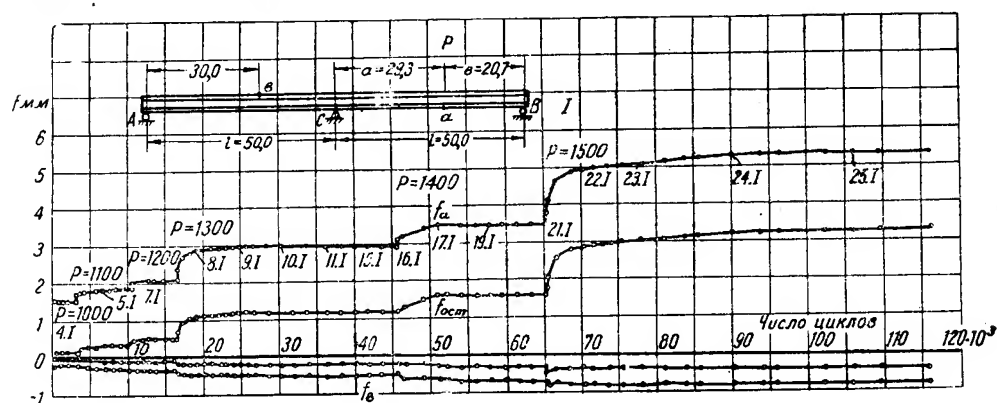


Рис. 25.

Вторая балка, № 9, испытывалась с предварительной тренировкой нагрузками, дающими пластические деформации, но меньшими, чем теоретическая предельная нагрузка. Для данной балки нагрузка предела упругой работы $P_s = 911$ кг, предельная нагрузка $P_T = 1340$ кг. При испытании приняты ступени нагрузки 1000, 1100, 1200, 1300, 1400 и 1500 кг (рис. 25). Вследствие предварительной тренировки, как и для балок прямоугольного сечения, прогибы и удлинения волокон получились меньше, чем для балки № 8, испытанной без предварительной

тренировки. При нагрузке 1300 кг, что на 3% меньше предельной нагрузки, полный и остаточный прогибы, после 45 430 повторений нагрузки составили 2,88 мм и 1,17 мм, что меньше прогибов для балки № 8 на 43 и 63%. Даже при нагрузке 1400 кг (1,045 от предельной нагрузки) прогибы получились меньшими, чем прогибы балки № 8 при предельной нагрузке; они составили 3,45 мм и 1,59 мм вместо 5,03 мм и 3,14 мм, т. е. были на 31 и 49% меньше.

Таким образом, предварительная тренировка балок меньшей нагрузкой при двутавровом сечении дает большее снижение прогибов, чем при прямоугольном сечении. Остаточные прогибы снижаются в большей степени, чем полные. В табл. 2 приведены значения полных, остаточных и упругих прогибов для балок прямоугольного и двутаврового сечений. Число повторений нагрузки везде указано от начала опыта.

Таблица 2

Форма сечения	Номер балки	I (см ⁴)	W (см ³)	T (см ³)	Теоретич. нагрузка		Опытная повторная нагрузка P (кг)	Число повторений	Прогиб (мм)			$f_{ост}$ $f_{упр}$
					P_s (кг)	P_T (кг)			f	$f_{ост}$	$f_{упр}$	
Прямоугольная	9	4,41	2,94	4,41	611	1105	1105	38200	6,50	3,96	2,54	1,55
	10	4,45	2,98	4,47	620	1120	900	2340				
							1000	57350	2,84	0,55	2,19	
							1120	114000	5,03	2,57	2,46	1,045
							1200	176000				
Двутавровая	8	8,37	4,36	5,20	905	1302	1300	43000	5,03	3,14	1,89	1,66
	9	8,46	4,39	5,34	911	1340	1400	58500	6,07	4,10	1,97	
							1000	3260	1,53	0,19	1,34	
							1100	10360	1,85	0,35	1,50	
							1200	16350	2,06	0,46	1,60	
							1300	45430	2,88	1,17	1,71	0,685
							1400	65200	3,45	1,59	1,86	0,855
							1500	116080	5,31	3,24	2,07	1,565

В табл. 2 подчеркнуты значения, относящиеся к предельным нагрузкам. Для балки № 9 двутаврового сечения подчеркнуты значения, относящиеся к двум нагрузкам (1300 и 1400 кг), из коих одна меньше, а другая больше предельной нагрузки 1340 кг. Из последнего столбца таблицы видно, как заметно снижается отношение остаточного прогиба к упругому при предварительной тренировке балок нагрузкой, меньшей, чем предельная нагрузка. Особенно это заметно для балок двутаврового сечения, где это отношение даже меньше единицы.

Испытания двухпролетных балок подвижной нагрузкой

Испытаны две балки, № 7 и 6. Режим испытания балок двутаврового сечения был несколько изменен по сравнению с балками прямоугольного сечения; интервалы нагружения составляли 1,4 мм (автоматическое перемещение нагрузки) вместо 25 мм для балок прямоугольного сечения (перемещение нагрузки вручную). Такие условия испытания менее благоприятны для балки, так как нагрузка, дающая пласти-

ческие деформации, прикладывается в большем числе сечений балки, и потому полные и остаточные прогибы должны получиться большими. Опыты подтвердили это предположение. Предполагалось также, что по аналогии с балками прямоугольного сечения при повторных прохождении нагрузки затухание роста полных и остаточных деформаций будет

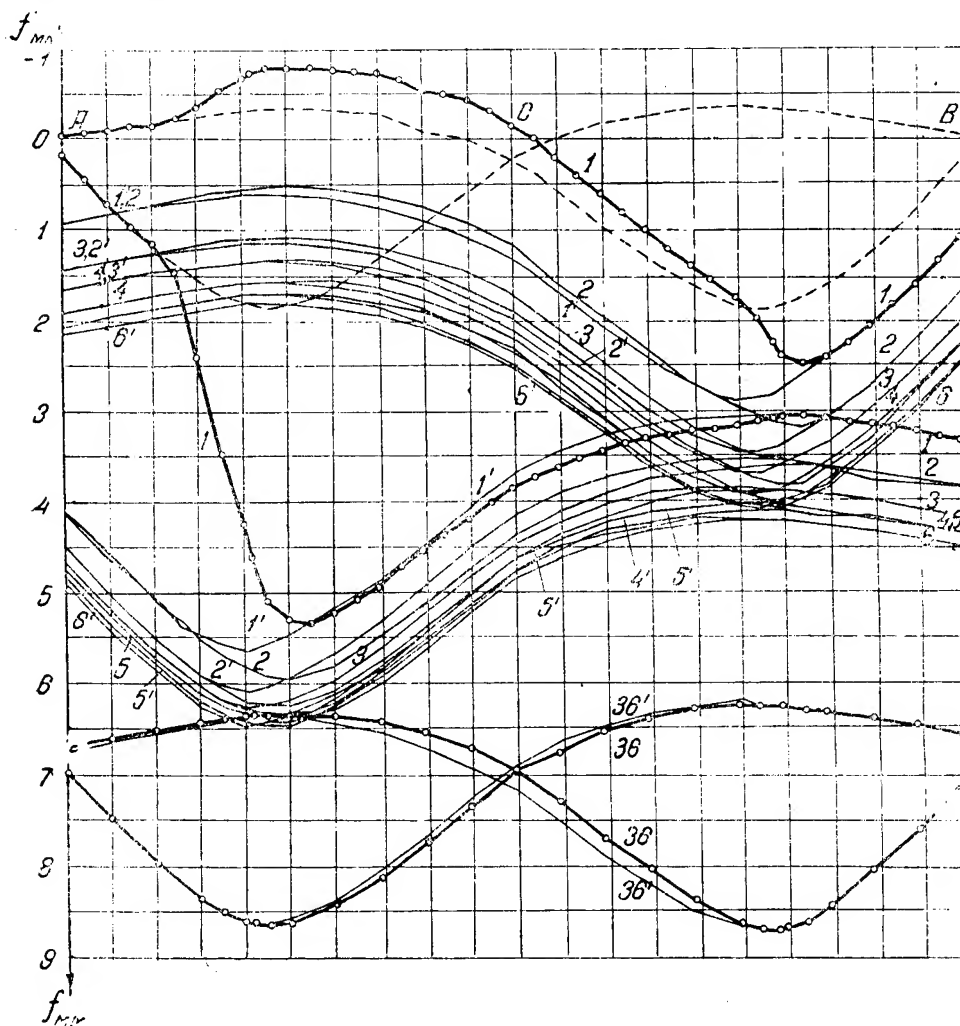


Рис. 26.

происходить очень быстро, через 2—3 прохождения, и что предварительная тренировка балки прохождениями нагрузки, меньшей, чем предельная, заметно снизит полные и остаточные прогибы при прохождении предельной нагрузки. В действительности же оказалось, что прекращение роста деформаций происходит значительно позже, после 70—100 прохождений нагрузки, а предварительная тренировка балки не снижает деформации. Объяснение этих расхождений в результатах испытаний балок прямоугольного и двутаврового сечений будет приведено далее.

Балка № 7 испытывалась предельной нагрузкой 1350 кг, вычисленной теоретически в предположении однократного нагружения балки в сечении 0,4142 l от крайней опоры. Нагрузка, соответствующая пределу упругой работы балки, равна 922 кг. На рис. 26 показаны линии влияния полных прогибов в левом и правом пролетах. Пунктиром пока-

заны линии влияния упругих частей прогибов, полученные как разности опытных полных и остаточных прогибов. На рис. 27 показаны диаграммы полных и остаточных прогибов в зависимости от числа проходов нагрузки. В течение первых 12 проходов нагрузка перемещалась через 25 мм; при этом, как видно из рис. 27, уже намечалась стабилизация прогибов. При дальнейших проходах нагрузки интервал нагружения составлял 1,4 мм. При этом прогибы начали сперва заметно возрастать, а затем, после 70 проходов нагрузки, рост их прекратился. Это видно также из рис. 26, где приведены линии влияния прогибов при первых 12 проходах (от 1 до 6') и при двух последних

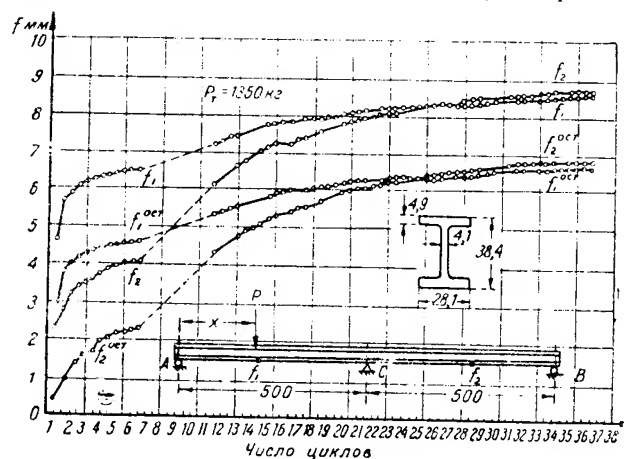


Рис. 27.

проходах (36 и 36'). Сперва прогибы в левом пролете были заметно большими, чем в правом. Это объясняется тем, что опыт начинался с движения груза в левом пролете. После примерно 50 проходов нагрузки прогибы обоих пролетов выравнивались и затем до конца опыта оставались примерно одинаковыми (рис. 27). Полный и остаточный прогибы после 72 проходов нагрузки составили 8,65 и 6,73 мм в правом пролете и 8,72 и 6,90 мм в левом пролете, т. е. были значительно большими, чем при повторной нагрузке.

Вторая балка № 6 испытывалась с предварительной тренировкой нагрузками, меньшими, чем предельная. Первая ступень нагрузки — 1000 кг — соответствует полному пластическому состоянию поперечного сечения балки; вторая ступень — 1200 кг, третья — 1328 кг — предельная нагрузка.

На рис. 28 показаны диаграммы прогибов в зависимости от числа повторений нагрузки. При нагрузках, меньших, чем предельная нагрузка, деформации стабилизировались очень быстро. При предельной нагрузке, наоборот, стабилизация прогибов наметилась примерно только после 80 повторных проходов нагрузки, причем прогибы обоих пролетов, как и при испытании балки № 7, почти сравнялись. Полные и остаточные прогибы составили 9,58 и 7,66 мм в правом пролете и 9,12 и 7,20 мм в левом пролете, т. е. были несколько большими, чем для балки № 7, что объясняется несколько меньшими размерами сечения балки № 6.

При испытании обеих балок наблюдались прогибы не только в вертикальной плоскости, но и в горизонтальной. В обоих пролетах боковые прогибы направлены в одну сторону. Кроме того, получились небольшое скручивание балок и перекосы сечений в средних участках обоих пролетов. При испытании двутавровых балок повторной нагрузкой боковые прогибы также наблюдались, но весьма незначительные. При статической и подвижной нагрузками боковые прогибы отсутствовали.

Боковые прогибы, перекосы сечений и скручивание объясняются следующими причинами. При подвижной нагрузке образуются значительные по длине зоны текучести. При предельной нагрузке эти зоны охватывают все сечения. В средних участках обоих пролетов и над средней опорой при образовании зон текучести модуль деформации значительно уменьшился, что резко снижает значение критической нагрузки общей устойчивости балки. При горизонтальной площадке текучести и отсутствии упрочнения на диаграмме растяжения этот модуль равен нулю. В действительности же модуль будет больше нуля, так как в полках будет иметь место упрочнение. Таким образом, причиной обра-

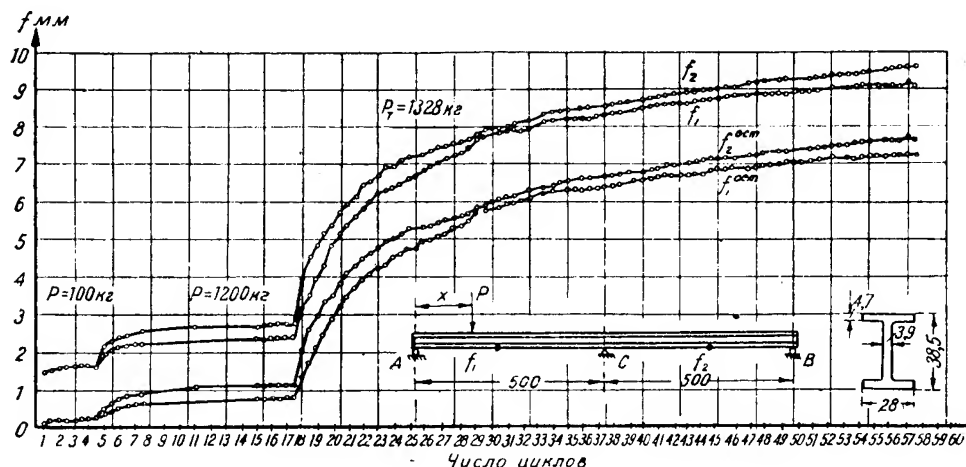


Рис. 28.

зования боковых прогибов и скручивания следует считать потерю общей устойчивости балки вследствие образования значительных по длине зон текучести. Кроме того, нагрузочное приспособление машины в момент разгрузки дает небольшое горизонтальное усилие, обусловленное конструкцией машины. Направление боковых деформаций совпадает с направлением этих усилий. При испытании двутавровых балок подвижной нагрузкой наблюдались еще остаточные деформации верхнего пояса, по всей его длине, в виде „грибовидности“. В нижнем поясе такие деформации не наблюдались. Причиной этих деформаций является образование местных пластических деформаций вследствие вдавливания нагрузочного валика в верхний пояс и смещения материала пояса под валиком в стороны не только вдоль балки, но и поперек. Это смещение в верхних волокнах и привело к деформации полков.

Выводы

Испытания двухпролетных балок прямоугольного и двутаврового сечений при повторной и подвижной нагрузке показали следующее.

1. Повторное приложение предельной нагрузки, вычисленной теоретически на основании теории выравнивания моментов, приводит к прекращению нарастания деформаций после 5 000—10 000 повторений нагрузки.

При нагрузке, несколько большей, чем теоретическая предельная нагрузка (на 10—15%), также происходит стабилизация деформаций, но после большего числа повторений нагрузки.

Предельной нагрузкой следует считать ту нагрузку, при повторении которой происходит стабилизация деформаций. Таким образом, опытная

предельная нагрузка не меньше теоретической, вычисленной в предположении однократного статического нагружения.

2. Предварительная тренировка балки повторной нагрузкой, дающей пластические деформации, но меньшей, чем теоретическая предельная нагрузка, заметно снижает деформации при повторении предельной нагрузки, по сравнению с деформациями, полученными при нагружении повторной предельной нагрузкой без предварительной тренировки меньшей нагрузкой. Это относится как к балкам прямоугольного, так и двутаврового сечений.

3. Повторное приложение подвижной предельной нагрузки, вычисленной теоретически в предположении однократного статического приложения ее в опасном сечении балки ($0,4142 l$ от крайней опоры), приводит к значительно более быстрому прекращению нарастания деформаций, чем при повторной нагрузке, прикладываемой в одном и том же сечении. Для балок прямоугольного сечения стабилизация деформаций происходит после 3—5 повторных прохождений нагрузки, а для балок двутаврового сечения — после 70—100 прохождений.

Худшие результаты для балок двутаврового сечения объясняются потерей общей устойчивости балки при образовании зон пластических деформаций, а также некоторыми недостатками опытной установки (отсутствие в пролетах закреплений, препятствующих боковому изгибу балки).

При повторных прохождении нагрузки балка работает как упругая, с постоянными остаточными деформациями.

4. Предварительная тренировка подвижными нагрузками, дающими пластические деформации, но меньшими, чем предельная нагрузка, приводит к заметному снижению деформаций балок прямоугольного сечения при предельной нагрузке. Для балок двутаврового сечения предварительная тренировка не снижает деформаций, что объясняется потерей общей устойчивости балки при значительном развитии зон пластических деформаций при предельной нагрузке.

5. Влияние касательных напряжений на величину предельной нагрузки при принятых размерах опытных балок весьма незначительно [11]. В данных балках двутаврового сечения образование пластических зон происходит сперва в полках, а затем в стенке. При опытах это подтвердилось показаниями тензометров. Достижение несущей способности балки вследствие образования пластических деформаций в стенке, а не в полках, на возможность чего указал Б. М. Броуде [12], в данном случае, при принятых соотношениях размеров, исключается.

6. На основании проведенных опытов предельное состояние двухпролетной неразрезной балки при подвижной нагрузке определяется нагрузкой, которая во всяком случае не меньше теоретической предельной нагрузки, вычисленной на основании теории выравнивания моментов, в предположении однократного приложения ее в опасном сечении. Предполагается, конечно, что балки подвержены такому числу повторений нагрузки, при котором явление усталости еще можно не учитывать.

Очевидно, приведенные здесь выводы могут быть распространены и на другие схемы неразрезных балок постоянного сечения, т. е. с числом пролетов, большим двух.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bleich, Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung der elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes, Bauingenieur, № 19/20, 1932.

2. E. Melan, Die Bestimmung des Sicherheitsgrades einfach statisch unbestimmter Fachwerke, Zf. für angew. Mathem. und Mech., № 3, 1932.

3. Л. И. Маламент, Упруго-пластический процесс в неразрезной балке при подвижной нагрузке. Сб. „Исследования металлических конструкций“, 1940.

4. К. Г. Протасов, Расчет статически неопределимых мостовых ферм, 1947.
5. А. А. Гвоздев, Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, гл. III, 1949.
6. A. L a s a r d, Flastification des poutres à âme pleine, en acier doux, fléchies, Travaux, № 205, 206, 1951.
7. М. Д. Жудин и О. І. Стрельбицька, Пластичні деформації в сталених конструкціях, Експериментальне дослідження границі текучості при згині, вид. АН УРСР, 1939.
8. В. С. Туркин, Исследование упруго-пластической работы стальных неразрезных балок, Сборник ЦНИПС, 1938.
9. Н. Д. Жудин, Деформации стальных неразрезных балок в упруго-пластической стадии при подвижной нагрузке, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, № 17, 1952.
10. Н. Д. Жудин, Несущая способность стальных балок при повторной нагрузке, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, № 14, 1950.
11. А. И. Стрельбицкая, Влияние поперечной силы на величину предельной нагрузки при изгибе стальных балок, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, № 12, 1950.
12. Б. М. Броуде, Расчет балок по предельному состоянию при учете касательных напряжений, Сб. „Исследования по теории сооружений“, вып. V, 1951.

УСТАЛОСТНАЯ ПРОЧНОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО РАСТЯНУТОЙ СТАЛИ

Н. И. Черняк

В статье изложена разработанная автором методика измерения пластических деформаций и показано влияние предварительной деформации растяжения на выносливость стали 45 и 40Х.

Исследование влияния холодной пластической деформации на механические характеристики металлов представляет большой научный и прикладной интерес.

Многие из современных методов поверхностного упрочнения деталей машин (обкатка роликом, дробеструйная обработка и др.) основаны на том, что в поверхностных слоях деталей создаются пластические деформации. Поэтому исследование влияния равномерной и неравномерной пластической деформации на усталостную прочность стали является весьма актуальной задачей для машиностроения.

Определение зависимости между напряжениями и деформациями в упруго-пластической области и изучение закономерности изменения механических свойств при пластических деформациях осуществляется с помощью методов теории пластичности [1] и экспериментальных исследований.

По вопросу о наклепе имеется обширная литература (например, [2—5]), посвященная выяснению физической стороны явления и рациональному технологическому использованию свойств наклепанного металла. Однако вопрос о влиянии наклепа (равномерного и неравномерного) на усталостную прочность стали исследован совершенно недостаточно. Особенно мало данных о влиянии наклепа, вызванного растяжением.

В настоящей работе рассматриваются характеристики выносливости стали в зависимости от степени равномерного наклепа, вызванного растяжением. В соответствии с поставленной задачей исключаются из рассмотрения вопросы влияния остаточных напряжений первого рода и неоднородности механических свойств по сечению. При исследовании равномерного наклепа и его влияния на механические свойства металла необходимо задавать с достаточной степенью точности различную величину пластической деформации.

Несовершенство обычно применяемой методики определения величины предварительной пластической деформации является одной из серьезных причин отсутствия в литературе достаточно полных и обоснованных материалов относительно влияния предварительной деформации на предел выносливости стали.

Поэтому необходимо было уделить внимание разработке надежной методики измерения пластических деформаций образцов в процессе их деформирования [6].

1. Методика деформирования и измерения пластических деформаций

Для предварительного деформирования металла в условиях растяжения и сжатия были спроектированы и изготовлены специальные образцы и приспособления. На рис. 1 последовательно показаны: *а* — исходная заготовка, *б* — образец, полученный из заготовки и предназначенный для статического испытания на растяжение — сжатие, *в* — образец, полученный после деформирования и обработки головок и предназначенный для испытания на усталость на машине „НУ“ (чистый изгиб при вращении).

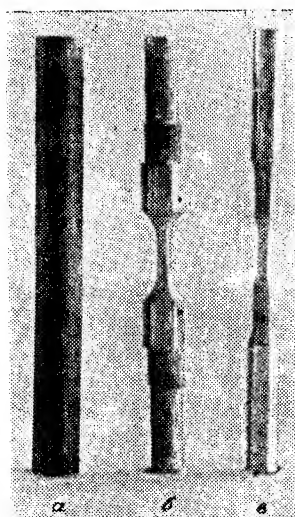


Рис. 1.

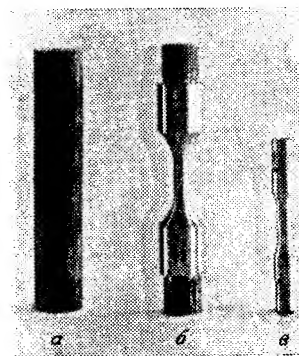


Рис. 2.

Соответственно на рис. 2 показаны: *а* — исходная заготовка, *б* — образец для статического испытания и *в* — образец для испытания на усталость на машине Мура (чистый изгиб при вращении).

Для сохранения прямолинейности оси образцов, показанных на рис. 1, б и 2, б при их испытании на растяжение — сжатие, было спроектировано и изготовлено специальное приспособление, чертеж которого изображен на рис. 3.

Части этого приспособления: направляющий цилиндр и цилиндрические вкладыши с ввинченным в них образцом показаны на рис. 4. В собранном виде это приспособление показано на рис. 5.

Для измерения пластических деформаций в процессе деформирования была разработана специальная методика. Эта методика основана на том, что перемещения точек пластически деформируемого тела преобразуются в деформации упругого элемента. Упругий элемент в виде тонкой стальной пластинки соединяется своими концами с базовыми точками испытуемого образца.

Перемещения концов стальной пластинки приводят к ее изгибу, не выходящему за пределы упругости даже в случае больших пластических деформаций образца.

Деформации стальной пластинки измеряются с помощью наклеенного на ней тензопроволочного датчика и аппаратуры, применяемой обычно при тензоизмерениях.

На рис. 6, а схематически показан упругий элемент с базой $AB = l$ в исходном состоянии (сплошная линия) и в деформированном состоянии, когда испытуемый образец, на котором установлен упругий элемент, получил удлинение $\Delta l = BB'$ (пунктирная линия).

С целью обеспечения измерения больших деформаций на малой базе была применена схема, показанная на рис. 6, б.

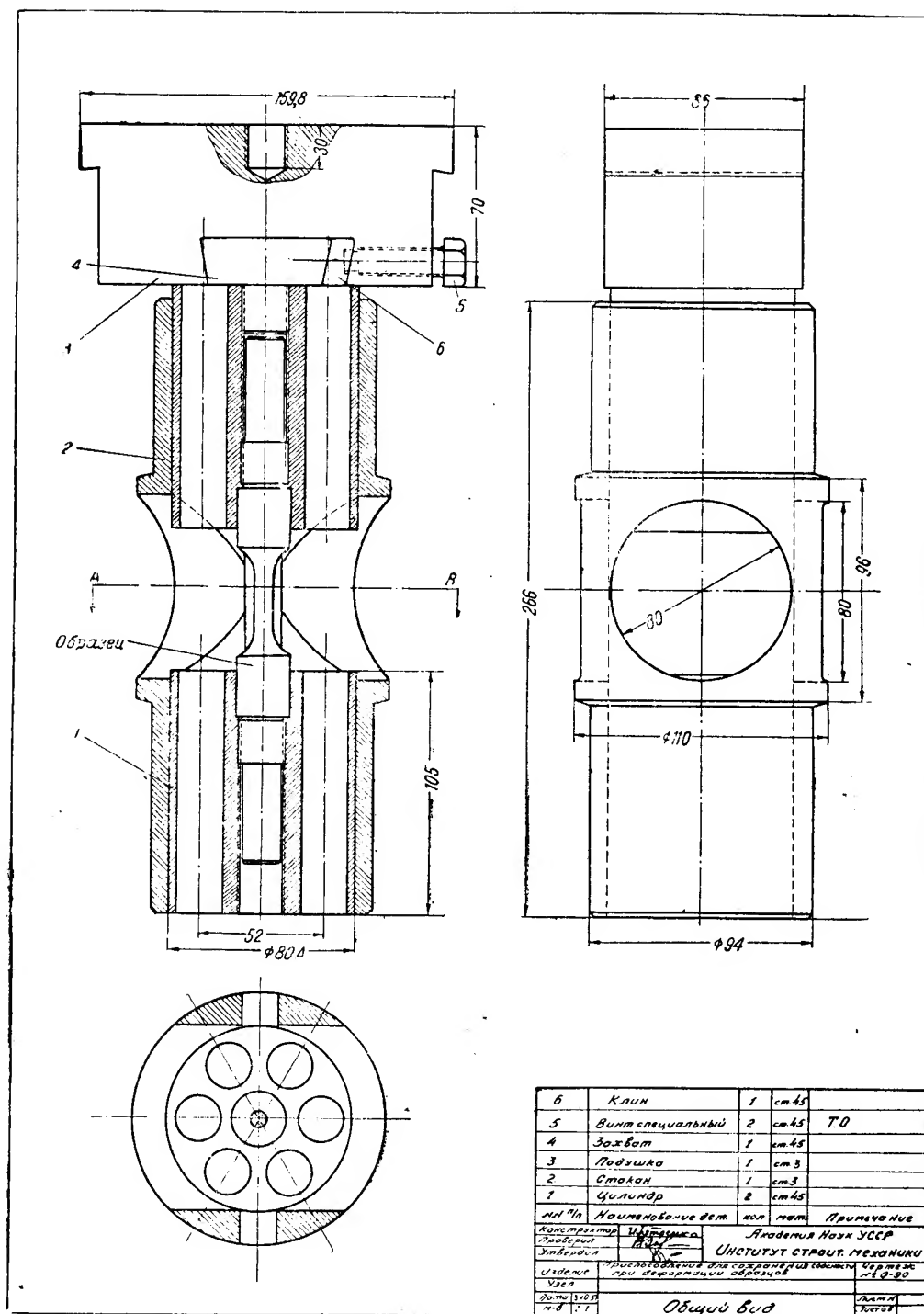


Рис. 3.

В этом случае упругий элемент AB связан с базовыми точками на образце через уголки AaA_1 и BdB_1 .

Ниже приводятся некоторые конструктивные варианты этих схем.

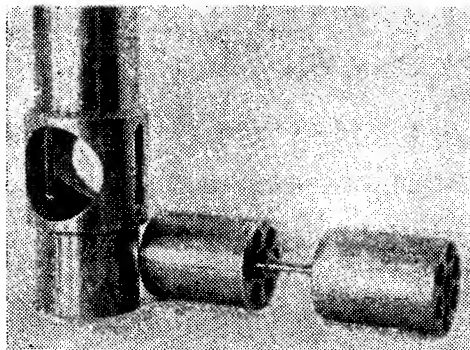


Рис. 4.

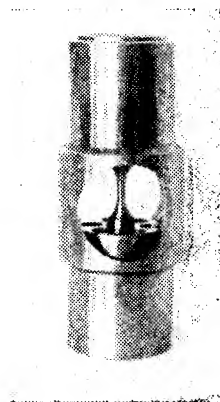


Рис. 5.

Крепление упругих элементов к головкам образца производится с помощью винтов (рис. 7) и специальных колец (рис. 8). Крепление

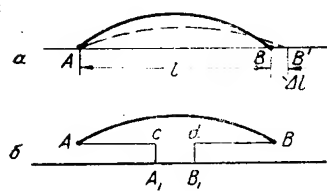


Рис. 6.

упругих элементов к цилиндрической части образца через уголки осуществляется путем припаивания или приклеивания последних к образцу (рис. 9). На рис. 9 показаны также датчики, измеряющие деформацию образца по перемещениям головок. Это позволяет получать диаграммы деформации образца по перемещениям базовых точек в цилиндрической части, а также по перемещениям головок образца и проводить их сравнительное исследование.

Кроме описанного способа измерения деформаций с помощью упругих элементов, прикрепленных к образцу, была разработана также конструкция специального тензометра.

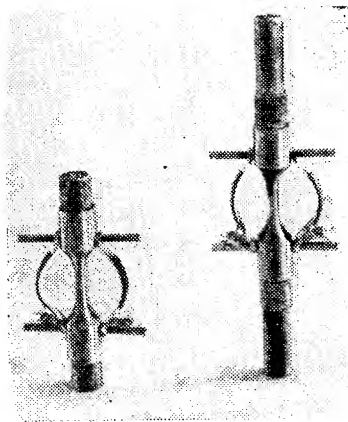


Рис. 7.

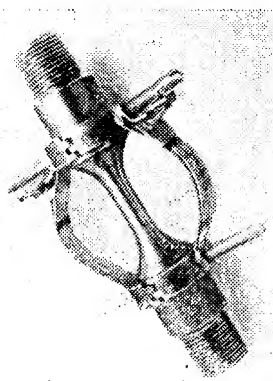


Рис. 8.

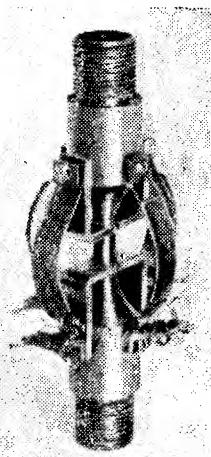


Рис. 9.

Учитывая, что при пластических деформациях образца в продольном направлении происходит значительное изменение его поперечных разме-

ров, необходимо было при разработке конструкции соответствующего тензометра уделить особое внимание вопросам упругого прижима ножек тензометра к образцу.

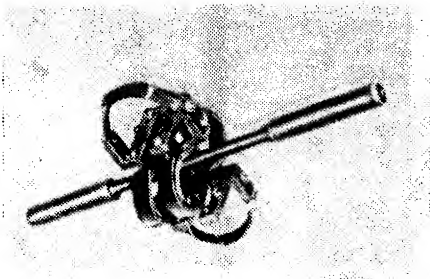


Рис. 10.

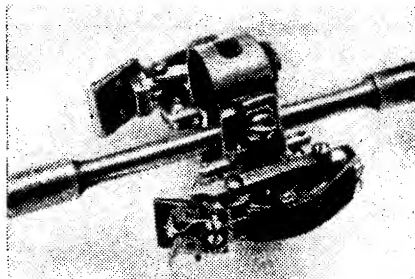


Рис. 11.

Общий вид такого тензометра с двумя прижимающими пружинами показан на рис. 10, а с одной пружиной — на рис. 11.

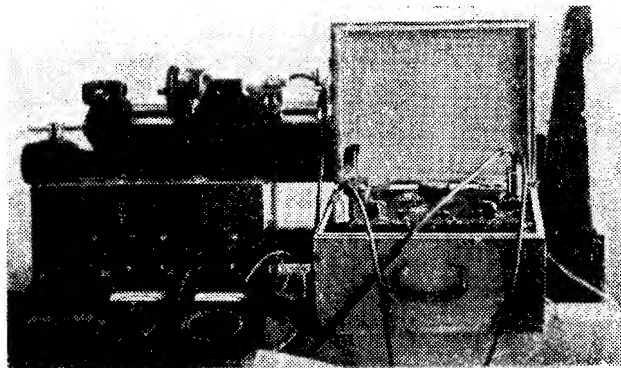


Рис. 12.

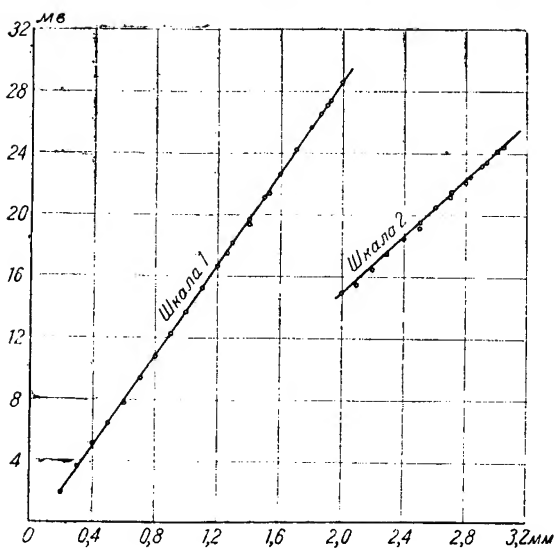


Рис. 13.

Кроме измерения продольных деформаций этот тензометр позволяет с помощью тензопроволочных датчиков, наклеенных на прижимающих пружинах, вести также измерение поперечных деформаций.

С целью получения количественных данных о зависимости между показаниями приборов, регистрирующих изменения сопротивления тензодатчиков, и деформацией упругого элемента, соответствующей изме-



Рис. 14.

ряемой пластической деформации, проводится тарировка этих упругих элементов с наклеенными тензопроволочными датчиками на калибраторе (рис. 12).

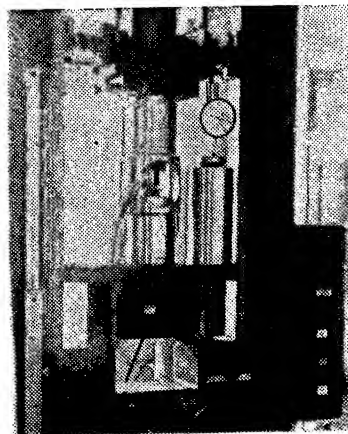


Рис. 15.

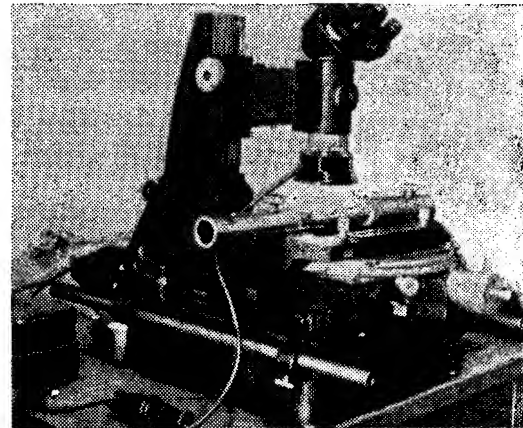


Рис. 16.

Крепление упругого элемента при его тарировке на калибраторе осуществляется с помощью специального приспособления. Установка упругого элемента на определенной базе производится при помощи калибра. Упругий элемент в исходном состоянии находится в несколько изогнутом положении, что позволяет производить его тарировку в условиях, соответствующих как растяжению испытуемого образца, так и его сжатию.

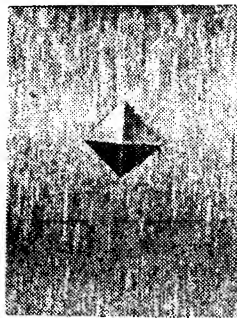


Рис. 17.

Соответствующие изменения электрических параметров тензодатчика, наклеенного на гибком элементе, при его деформировании регистрируются с помощью шлейфного осциллографа или милливольтамперметра. Один из тарировочных графиков приведен на рис. 13. Образец с упругими элементами в направляющем цилиндре, установленном на испытательной машине, показан на рис. 15.

Одна из получаемых диаграмм деформации, построенных по точкам на основании показаний датчиков, приведена на рис. 14.

С целью контроля максимальной величины пластической деформации образца на нем наносятся отпечатки алмазной пирамидой на приборе Виккерса (под нагрузкой 5—10 кг) и измеряется расстояние между ними до и после деформирования. Эти измерения удобно производятся на инструментальном микроскопе (рис. 16).

Один из отпечатков, полученных вдавливанием алмазной пирамиды в образец, показан на рис. 17.

Предельная погрешность в измерениях не превышала ± 5 мк.

2. Влияние наклепа растяжением на выносливость стали

По вопросу о влиянии на выносливость стали наклепа растяжением имеется мало данных.

Ниже приводятся данные исследований, произведенных над сталями 0,06 % С; 0,24 % С; 0,27 % С; 0,47 % С и 1,10 % С по литературным данным [7—10].

Таблица 1

Химический состав

Углерод (%)	Марганец (%)	Кремний (%)	Хром (%)	Никель (%)	Сера (%)	Фосфор (%)	Литературный источник
0,06	0,47	0,05	0,07	0,25	0,035	0,018	[8]
0,24	0,46	0,37	—	—	0,034	0,051	[7]
0,27	0,76	0,33	—	—	0,110	0,040	[7]
0,47	0,72	0,23	—	—	В норме		[9]
1,10	0,32	0,22	—	—	0,063	0,040	[7]

Таблица 2

Механические свойства

Характеристика	Сталь				
	0,06 % С [8]	0,24 % С [7]	0,27 % С [7]	0,47 % С [9]	1,10 % С [7]
Предел пропорциональности (кг/мм ²)	21,5	20,5	30,0	—	28,6
Предел текучести (кг/мм ²)	23,3	—	—	33,7	—
Предел прочности (кг/мм ²)	35,5	41,0	52,3	62,4	72,1
Относительное удлинение (%)	40,5	32,4	26,0	32,0	10,9
Относительное сужение (%)	75,9	64,0	55,5	48,5	24,3

Наклепу растяжением подвергались заготовки, из которых затем вытачивались образцы для усталостных испытаний.

Диаметры заготовок и образцов из указанных выше сталей (см. табл. 1 и 2) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Диаметры заготовок и образцов

Сталь	0,06 % С [8]	0,24 % С; 0,27 % С; 1,10 % С [7]	0,47 % С [9]
Диаметр заготовки (мм)	28	15	20
Диаметр образца (мм)	12	7,5	2

Стали с 0,06 и 0,47% С были нормализованы в заготовках.

Испытание на усталость образцов $d = 7,5$ мм велось на машине Шенка (чистый изгиб при вращении), а образцов $d = 2$ мм и $d = 12$ мм на консольных машинах.

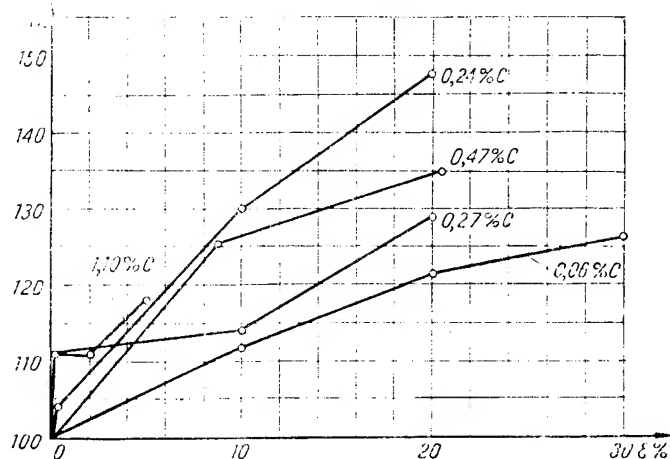


Рис. 19.

Результаты этих испытаний представлены в табл. 4 и на рис. 18, где приведены характеристики выносливости сталей в зависимости от величины предварительной деформации растяжения; при этом приняты следующие обозначения:

- $\sigma_{-1}(\epsilon)$ — предел выносливости стали, предварительно растянутой на величину относительного удлинения ϵ ;
 $\sigma_{-1}(\epsilon=0)$ — предел выносливости недеформированной стали;
 K — коэффициент, характеризующий относительное изменение предела выносливости стали в деформированном состоянии по сравнению с недеформированным

$$K = \frac{\sigma_{-1}(\epsilon)}{\sigma_{-1}(\epsilon=0)}$$

Таблица 4

Характеристики выносливости сталей

Сталь	0,06% С [8]		0, 0% С [10]		0,24% С [7]		0,27% С [7]		0,47% С [9]		1,10% С [7]	
	$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм²)	K (%)	$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм²)	K (%)	$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм²)	K (%)	$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм²)	K (%)	$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм²)	K (%)	$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм²)	K (%)
0	18,7	100	23,0	100	23,0	100	28,0	100	28,0	100	27,0	100
До предела текучести	—	—	—	—	24,0	104	31,0	111	—	—	30,0	111
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30,0	111
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	32,0	118
8,7	—	—	—	—	—	—	—	—	35,2	126	—	—
10	21,2	112	26,1	113	30,0	130	32,0	114	—	—	—	—
20	22,7	122	—	—	34,0	148	36,0	129	38,0*	135*	—	—
30	23,7	127	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

* Данные получены при $\epsilon = 20,5\%$.

В Институте строительной механики АН УССР нами были исследованы стали марок 45 и 40X. Образцы (рис. 1,б и 2,б) были подвергнуты статическому деформированию по ранее изложенной методике. Заготовки этих образцов были нормализованы.

Химический состав и механические свойства исследованных сталей приведены в табл. 5 и 6.

Таблица 5

Химический состав (%)

Марка стали	Углерод	Марганец	Кремний	Хром	Никель	Сера	Фосфор
45	0,46	0,80	0,26	0,03	0,07	0,035	0,008
40X	0,36	0,81	0,32	0,98	следы	0,024	0,013

Таблица 6

Механические свойства

Марка стали	Предел текучести (кг/мм ²)	Предел прочности (кг/мм ²)	Относительное удлинение (%)	Относительное сужение (%)
45	38,9	65,9	22,5	57,0
40X	50,4	84,1	18,0	66,6

Образцы из стали 45 подвергались механической обработке при следующих режимах:

а) скорость резания при токарной обработке $v = 25$ м/мин, подача $s = 0,17$ мм/об, глубина резания $t = 0,35$ мм;

б) шлифование производилось абразивным кругом марки ЭКСМ₁-60 диаметром $D = 270$ мм, число оборотов круга $n_k = 2500$ об/мин, число оборотов изделия $n_n = 100$ об/мин, глубина резания при шлифовании $t = 0,03 \div 0,05$ мм, охлаждение — водный раствор соды.

Образцы из стали 40X подвергались токарной обработке при следующих режимах: скорость резания $v = 18$ м/мин, подача $s = 0,03$ мм/об, глубина резания $t = 0,1$ мм.

Образцы из стали 45 и 40X предварительно растягивались до различных значений относительного удлинения, величина которого определялась на основании тарировочных графиков для упругих элементов с тензопроволочными датчиками и контролировалась путем измерения на инструментальном микроскопе расстояний между отпечатками, нанесенными на образец, а также путем измерения диаметров деформированных образцов при помощи рычажно-чувствительного микрометра (точность отсчета ± 1 мк).

После механической обработки головок образцы испытывались на устойчивость при чистом изгибе с вращением на машине НУ (сталь 45) и на машине Мура (сталь 40X).

Результаты испытаний представлены в табл. 7 и на рис. 19—20 (сталь 45), в табл. 8 и на рис. 21 (сталь 40X).

Относительное удлинение определялось по формуле $\varepsilon = \frac{\psi}{1-\psi}$, где ψ — относительное сужение, определяемое на основании измерения диаметров образцов в исходном и в деформированном состоянии.

В результате проведенных испытаний на усталость выявлено, что для нормализованной предварительно растянутой стали 45 в интервале деформаций от нуля до $\epsilon = 1,5 \div 2\%$ происходит снижение предела выносливости. При этой величине пластической деформации достигается минимум усталостной прочности, затем предел выносливости возрастает и при $\epsilon = 12\%$ достигает уровня, соответствующего усталостной прочности стали в недеформированном состоянии.

Соответственно для нормализованной стали 40X минимум усталостной прочности достигается при $\epsilon = 8-12\%$, с дальнейшим возрастанием величины предварительной деформации предел выносливости также начинает увеличиваться и при $\epsilon > 40\%$ достигает значения предела выносливости стали в недеформированном состоянии.

Таблица 7
Результаты испытаний стали 45 на усталость

Относительное сужение (ψ %)	Относительное удлинение (ϵ %)	Предел выносливости	
		$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм ²)	(K %)
0	0	33,7	100,0
0,5	0,6	31,0	92,0
1,0	1,0	30,3	90,0
1,4	1,4	30,0	89,0
2,6	2,6	30,1	89,3
4,0	4,0	30,6	90,8
4,5	4,5	30,9	91,7
6,0	6,0	31,4	93,2
7,7	8,3	32,3	95,8
10,7	12,0	33,7	100,0

Таблица 8
Результаты испытаний стали 40X на усталость

Относительное сужение (ψ %)	Относительное удлинение (ϵ %)	Предел выносливости	
		$\sigma_{-1}(\epsilon)$ (кг/мм ²)	(K %)
0	0	36,5	100
7,4	7,4	29,0	79,5
10,9	12,0	28,9	79,3
20,4	25,6	32,0	87,8
29,0	40,9	36,5	100,0

Таким образом, в отличие от приводимых в литературе данных, указывающих лишь на возрастание усталостной прочности с увеличением пластической деформации растяжения, в наших опытах выявлено снижение предела выносливости исследованных сталей при указанных величинах пластической деформации.

Следует отметить, что литературные данные, касающиеся влияния предварительной пластической деформации на усталостную прочность,

вообще немногочисленны, а в отношении же области малых пластических деформаций являются совершенно недостаточными.

В частности, необходимо подчеркнуть сложность проведения на графиках (см. рис. 18) линий, соединяющих точки, соответствующие $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \cong 10\%$, при отсутствии промежуточных значений. При наличии же (в единичных случаях) данных, соответствующих малым значениям деформации, например для стали с 1,10% С (рис. 18) при $\varepsilon = \varepsilon_T$ (у предела текучести) и $\varepsilon = 2\%$, выявляется в этом интервале отсутствие роста предела выносливости.

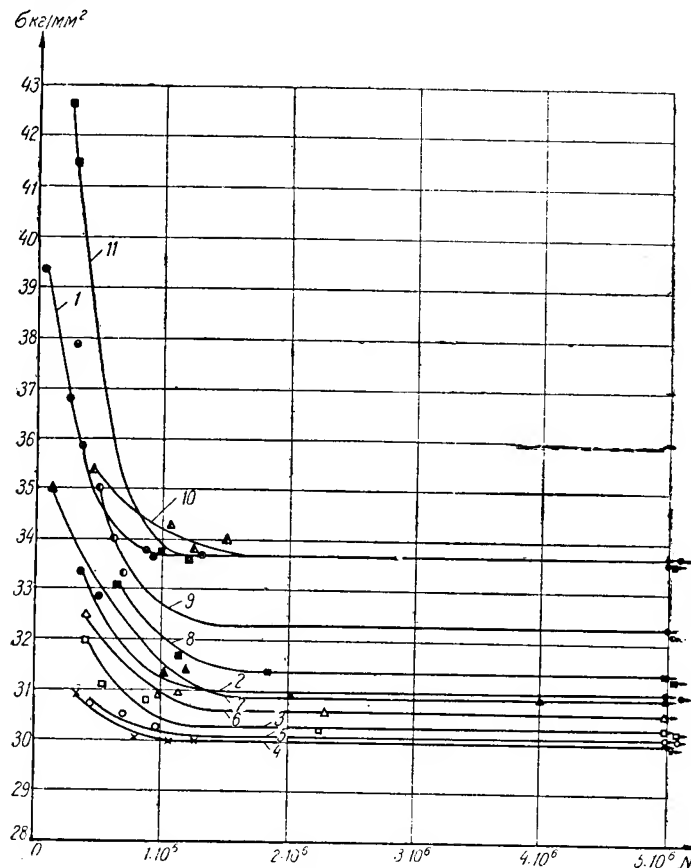


Рис. 19.

Следует также отметить, что в описываемых в литературе опытах заготовки образцов после растяжения подвергались в рабочей части дополнительной механической обработке, что в связи с поверхностным наклепом оказывало влияние на повышение предела выносливости стали.

Обнаруженное в наших опытах явление снижения усталостной прочности при малых величинах предварительной деформации растяжения характеризует, повидимому, проявление деформационной анизотропии и требует дальнейшего изучения с учетом структурного состояния металла и происходящих в нем изменений вследствие пластического деформирования.

Следует отметить, что исследования физических свойств монокристаллов алюминия, меди и других металлов выявили некоторые особенности характера наклепа при малых деформациях [12], [13].

При изучении деформированных кристаллов алюминия в электронном микроскопе [13] было отмечено, что при деформации монокристалла

алюминия на 4% во всех наблюдаемых случаях „линии“ скольжения прямолинейны, местами видны заметные искажения блоков в виде искривлений их ребер и граней. При больших деформациях (5—6, 10—12 и 20%), как и при малых, следы скольжения, а также искривление ребер и граней наблюдаются только местами.

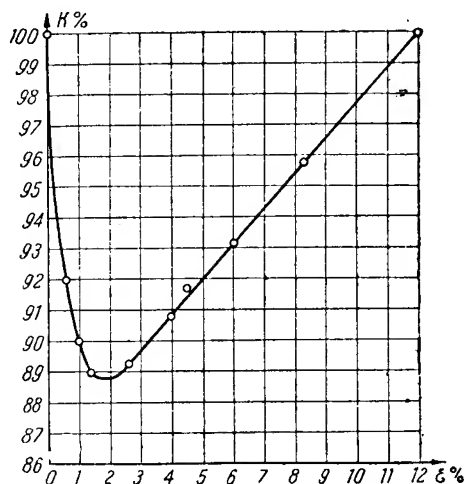


Рис. 20.

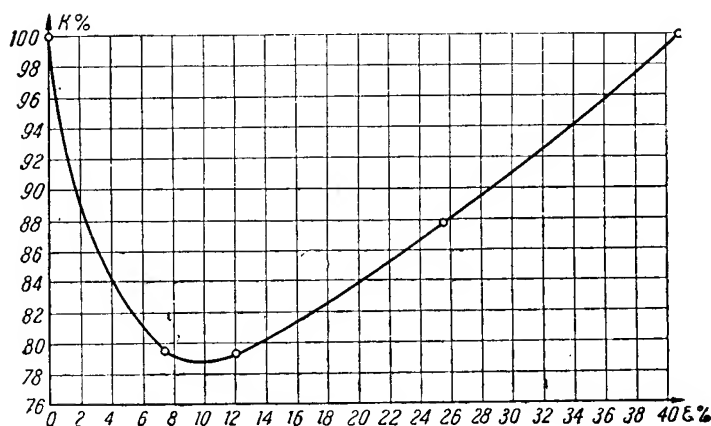


Рис. 21.

Таким образом, электронномикроскопическое исследование монокристаллов позволило обнаружить характерные явления при малых пластических деформациях. Представляет несомненный интерес проведение подобных исследований, в сочетании с другими методами структурного анализа, на деформированных поликристаллических металлах.

Заключение

1. В статье рассматривается вопрос о влиянии предварительной пластической деформации растяжения на выносливость стали.

Этот вопрос является частью более широкой задачи исследования влияния равномерной и неравномерной пластической деформации на усталостную прочность стали и является весьма актуальным для машиностроения, так как такие деформации создаются в поверхностных слоях деталей машин при современных методах поверхностного их упрочнения.

2. Немногочисленные литературные данные не дают достаточно обоснованных материалов для суждения о зависимости предела усталости стали от величины предварительной деформации растяжения.

Одной из причин этого является несовершенство обычно применяемой методики определения величины предварительной пластической деформации.

Разработанная и изложенная в настоящей статье методика измерения пластических деформаций в процессе деформирования основана на том, что перемещения точек пластически деформируемого тела преобразуются в упругие перемещения стальной пластинки и регистрируются с помощью наклеенного на ней тензопроволочного датчика и аппаратуры, применяемой при тензоизмерениях.

Разработано несколько конструктивных вариантов схем измерения, позволяющих производить измерение деформаций в пределах от 0,1—40% без перестановки тензометра.

3. Проведенные испытания на выносливость (изгиб при вращении) образцов нормализованной стали 45 и 40X, предварительно деформированных растяжением, в отличие от приводимых в литературе данных, указывающих лишь на рост усталостной прочности с увеличением пластической деформации растяжения, выявили снижение предела усталости исследованных сталей при малых величинах предварительной пластической деформации (для стали 45 при $\epsilon = 1,5 \div 2\%$ на 11% и для стали 40X при $\epsilon = 8 \div 12\%$ на 21%).

Следует отметить, что в опытах, описываемых в литературе, заготовки образцов после растяжения подвергались в рабочей части дополнительной механической обработке; таким образом, в этих опытах кроме влияния деформации растяжения имело место также влияние поверхностного наклепа от механической обработки.

Некоторые материалы для объяснения обнаруженного явления снижения предела выносливости при малых пластических деформациях растяжения дают приведенные в литературе результаты электронно-микроскопических исследований деформированных монокристаллов ряда металлов, выявивших характерные явления при малых пластических деформациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильющин, Пластичность, 1948.
2. Н. Н. Давиденков, Некоторые проблемы механики материалов, 1943.
3. К. П. Бунин, Железоуглеродистые сплавы, 1949.
4. С. И. Ратнер, Прочность и пластичность металлов, 1949.
5. Н. П. Шапов, Пластическая деформация как средство повышения прочности металлов и сплавов, Сб. „Повышение прочности деталей машины“, 1949.
6. М. И. Черняк, Про вимірювання пластичних деформацій у процесі деформування, ДАН УРСР, № 6, 1952.
7. И. А. Одинг и А. И. Ефремов, Влияние наклепа на предел выносливости (усталости) металлов, „Вестник металлопромышленности“, № 10, 1931.
8. И. В. Кудрявцев, Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении, 1951.
9. O. J. Horger a. J. L. Maulbetsch, Journ. of Appl. Mech., Sept. vol. 3, № 3, 1936.
10. H. Büchner, Forschung auf dem Gebiete des Ing. — Wes., № 1, 1938.
11. М. И. Черняк, Про зниження границі втоми сталі ст. 45 при малих величинах наклепу, ДАН УРСР, № 6, 1952.
12. J. S. Koehler a. T. H. Blewitt, The Physical Review, vol. 75, sec. ser. № 12, June 15, 1949.
13. М. В. Якутович и др. Известия Акад. наук СССР, Серия физическая, т. XV, № 3, 1951.

СМАЗОЧНЫЕ МАСЛА КАК СРЕДА, ПОНИЖАЮЩАЯ ВЫНОСЛИВОСТЬ СТАЛИ

Г. В. Карпенко

Циклически нагруженным стальным деталям машин обычно приходится работать в окружении каких-либо сред, могущих оказывать влияние на их циклическую прочность. В данной статье, рассматривая среды, в которых протекает работа циклически нагруженных стальных деталей, мы разделили их на три группы по виду возможного их воздействия на выносливость стали.

Предыдущими нашими работами [1] было показано, что поверхностно-активные среды, окружающие циклически нагруженные стальные детали, снижают, из-за адсорбционного облегчения разрушения и деформации твердых тел [2], выносливость стали. Это явление названо нами адсорбционной усталостью. Статья в основном посвящена рассмотрению смазочных масел как поверхностно-активной среды и возможного ее влияния в силу этого на выносливость стали.

1. Классификация сред

Среда, окружающая циклически нагруженный металл, может влиять на его выносливость. Это влияние может быть коррозионным, адсорбционным либо охлаждающим, когда среда не является теплоносителем *. В некоторых случаях среда практически не влияет на выносливость металла.

Коррозионное и адсорбционное влияние среды приводит к снижению выносливости металла, охлаждающее влияние повышает выносливость [3—4]. На практике отдельно и в чистом виде эти явления обычно не наблюдаются; чаще всего среда оказывает на металл одновременно несколько влияний, однако одно какое-либо является преобладающим для данной среды и ее состояния **.

По виду преобладающего воздействия среды на циклически нагруженный металл, среды можно разделить на три группы:

I. Неактивные (сухой чистый воздух, чистые углеводороды и т. п.);

II. Химически-активные (вода и водные растворы различных электролитов).

III. Поверхностно-активные*** (растворы поверхностно-активных веществ в углеводородах, являющихся диэлектриками, и в некоторых случаях в воде).

Вся наука об усталости металлов базируется на экспериментальных исследованиях различных металлов при их циклической работе в воз-

* В статье рассматриваются среды, не являющиеся теплоносителями.

** Охлаждающее влияние среды обычно является доминирующим только в зоне ограниченной выносливости у циклически вязких сталей, у которых наблюдается весьма высокий нагрев при циклических нагрузках.

*** Химически слабо активные или неактивные вовсе.

духе лабораторного помещения. Этот вид среды практически не оказывает влияния на усталостную прочность стали и будет нас интересовать только с точки зрения проведения в ней контрольных опытов с целью сравнения влияния других сред на выносливость.

Некоторое внимание в науке об усталости металлов уделено влиянию химически-активных сред (II группа сред), вызывающих коррозионные явления на металлических поверхностях, а при циклических нагружениях металлических деталей в этих средах — явление коррозионной усталости. Эти среды сильно снижают усталостную прочность стали. Несмотря на это механизм разрушения от коррозионной усталости изучен недостаточно.

Эта группа сред представляет собою в основном водные растворы сильных и слабых электролитов (неорганических кислот, щелочей, солей и ряда органических соединений), а также воду. Характерной особенностью этих сред является то, что молекулы растворенного вещества находятся в состоянии большей или меньшей диссоциации, которая обуславливает возможность течения в них коррозионных электрохимических процессов*.

Третья группа сред включает в себя различные растворы поверхностно-активных веществ в жидких диэлектриках (например, в углеводородах), не могущих привести к диссоциации молекул веществ, в них растворенных. Однако некоторые вещества, растворенные в диэлектрике, все же могут вызвать коррозионные процессы, которые до последнего времени относили к химическим коррозионным процессам, аналогичным процессам, протекающим в сухих газах.

Типичными представителями этого вида сред являются смазочные масла. Влиянию поверхностно-активных сред, таких как смазочное масло, на усталостную прочность стали не уделялось никакого внимания, в то время как подавляющее большинство циклически нагруженных деталей машин работает именно в окружении этих сред.

Все три группы сред оказывают охлаждающее влияние на циклически нагруженный металл, вызывая повышение его выносливости, что в основном объясняется изменением режима процессов упрочнения и отдыха. Эффект этого влияния зависит от снижения температуры под влиянием среды и наблюдается главным образом у циклически вязких металлов в области ограниченной выносливости. Жидкие среды обычно обладают лучшими охлаждающими качествами, которые тем выше, чем ниже кинематическая вязкость среды.

Жидкая среда обычно состоит из двух или нескольких компонентов: растворителя и растворенных в нем веществ. Растворители делятся на две группы: на полярные, например вода, и неполярные, например чистые углеводороды. Адсорбционное и коррозионное влияние жидких сред на циклически нагруженную металлическую деталь зависит как от растворенных веществ, так и от качества растворителя.

Среды, относящиеся к третьей группе (смазочные масла) по самому своему существу не должны вызывать какого-либо заметного коррозионного действия на металлы; среды второй группы являются типичными представителями коррозионно-агрессивных сред, причем охлаждающие их качества обычно выше, чем у сред третьей группы. В то же время среды второй и третьей групп являются адсорбционно-активными, могущими дать как физическую, так и в некоторых случаях химическую адсорбцию на поверхности металла.

Адсорбция из жидких сред (растворов) на границе металла будет зависеть от

* Кроме водных растворов, к диссоциации электролитов приводят такие растворители, как спирты, кетоны, альдегиды и другие вещества с высокой диэлектрической постоянной.

- а) химического характера растворенного вещества — адсорбтива;
- б) физико-химических особенностей растворителя;
- в) физического состояния поверхности адсорбента (в нашем случае поверхности стальной детали).

Относящиеся ко второй группе сред сильные электролиты, диссоциированные на ионы, на поверхности твердой фазы адсорбируются в виде катионов или анионов, причем адсорбция последних обычно не одинакова, и для каждого вида ионов существует своя изотерма адсорбции $\Gamma = f(C)$. Адсорбция ионов из этой среды протекает под воздействием двух родов сил:

- а) молекулярно-поверхностных сил адсорбента (как и при всех видах адсорбционных процессов);
- б) электрических сил, появляющихся только в случае адсорбции ионов.

Слабые электролиты, диссоциирующие в водных растворах в меньшей степени, адсорбируются целыми молекулами.

Из сред третьей группы поверхностно-активные вещества адсорбируются под влиянием молекулярно-поверхностных сил адсорбента целыми молекулами. Однако вне зависимости от того, адсорбируются ли ионы или целые молекулы на поверхности металла, это явление должно снижать выносимость стали в силу открытого еще в 1928 г. П. А. Ребиндером [2] адсорбционного облегчения деформации и разрушения твердых тел. Необходимо иметь в виду, что явление адсорбции, как требующее малого латентного периода, предшествует любым другим поверхностным явлениям, например коррозионным.

2. Смазочные масла и их коррозионно- и поверхностно-активные свойства

В качестве типичного и наиболее распространенного представителя третьей группы сред будут рассмотрены смазочные масла. Эта среда, вызывая в основном адсорбционное влияние на выносимость находящейся в ней стали, в какой-то мере может оказывать коррозионное и охлаждающее воздействие. В силу этого в указанной главе будут рассмотрены коррозионные, поверхностно-активные и охлаждающие качества смазочных масел, причем поверхностно-активные качества будут характеризоваться смазочной способностью масла.

Смазочные масла являются механической смесью различных неактивных углеводородов, состоящих из симметрично построенных молекул. Однако масла не представляют собою чистых углеводородов, а загрязнены органическими кислотами, смолами, асфальтенами и другими поверхностно-активными веществами.

Масла минерального происхождения в основном состоят из нефтяных углеводородов с различным содержанием боковых цепей. В эти масла может входить до 10—15% углеводородов ароматической группы [5]. Качество масла зависит от тех углеводородов, которые входят в его состав, однако оценка масла обычно производится не на основании их химического анализа, а на основании определения их физико-химических констант, что объясняется большим разнообразием углеводородов, в них входящих, и трудностью их определения*.

Масла растительно-животного происхождения состоят из глицеридов, представляющих собою соединение трехатомного спирта — глицерина ($C_3H_5(OH)_3$) с высшими насыщенными и ненасыщенными жирными кислотами, т. е. эти масла являются эфирами жирных кислот.

* Есть несколько классификаций масел по химическому составу, однако на практике обычно интересуются физико-химическими константами, позволяющими легко классифицировать масла. Необходимо отметить, что эти константы не включают в себя такую важную характеристику масла, как его маслянистость.

В составе масел растительно-животного происхождения встречается большое количество глицеридов различных жирных кислот, принадлежащих главным образом к предельным одноосновным кислотам жирного ряда $C_nH_{2n+1}COOH$. Наиболее часто встречаются глицериды пальметиновой ($C_3H_5(C_{16}H_{31}O_2)_3$) и стеариновой ($C_3H_5(C_{18}H_{35}O_2)_3$) кислот, составляющих основу твердых жиров. В жидких маслах весьма распространен глицерид олеиновой кислоты (непредельной одноосновной кислоты ряда $C_nH_{2n-1}COOH$). Касторовое масло, одно из наиболее распространенных смазочных масел растительного происхождения, состоит в основном (до 80 %) из глицеридов рицинолевой кислоты [6].

Для глицеридов характерна реакция омыления, при которой сложный эфир-глицерид под влиянием температуры присоединяет к себе воду и расщепляется на жирные кислоты и спирты.

В составе смазочных масел допускаются в ограниченных количествах весьма поверхностно-активные, составленные из дифильных молекул органические кислоты в виде свободных жирных кислот и в виде нафтенowych кислот*. Первые содержатся в маслах растительно-животного происхождения, вторые — в минеральных маслах.

Ограниченные кислоты, находящиеся в маслах, несмотря на слабо выраженные кислотные свойства, могут вызвать при их воздействии на металлы образование металлоорганических соединений в виде металлических мыл. Корродирующее действие органических кислот, находящихся в масле, будет зависеть от их концентрации. Более активными в отношении окисления металла являются нефтеновые кислоты, причем наиболее подвержены их окисляющему воздействию цинк и свинец, в то время как сталь относительно слабо реагирует на их действие.

В минеральных смазочных маслах допускается небольшая органическая кислотность, равная 0,2 мг КОН, которая практически не оказывает корродирующего действия на металлы при температурах до 100—120°С [7]**.

В маслах растительно-животного происхождения допускается более высокий процент жирных кислот. Например, кислотность касторового масла допускается до 2 мг КОН [5]. Это масло все же не применяется для консервации деталей, так как при длительном соприкосновении с металлами может вызвать их коррозию. Однако последняя в основном возникает не от имеющейся кислотности масла, а от ее повышения при длительном соприкосновении с воздухом в тонкой пленке, покрывающей деталь.

Щелочи и минеральные кислоты в смазочных маслах совершенно не допускаются, так как могут вызвать сильную коррозию смазываемых металлических поверхностей.

Из приведенной выше краткой характеристики смазочных масел следует, что они должны быть практически нейтральными в отношении их коррозионного воздействия на металлы.

Консистентные смазки также не должны влиять химически на смазываемые поверхности металлов. Большинство консистентных смазок изготавливается из минеральных масел путем их загущения главным образом кальциевыми либо натриевыми мылами. Эти мыла изготавливаются из различных растительных и животных масел и жиров, таких как касторовое, сурепное, хлопковое масла, свиное сало и т. п. Изготавливаются мыла также из свободных жирных кислот.

Загустители — мыла, входящие в состав консистентных смазок, не дают простых механических смесей с минеральными маслами, а должны

* Оба эти вида кислот относятся к соединениям, содержащим карбоксильную группу [7].

** Нафтеновые кислоты особенно нежелательны при возможности попадания в масло воды.

образовывать сложные коллоидные системы с определенной структурой, влияющей на свойства смазки. Как и все коллоидные системы, консистентные смазки состоят из двух фаз: первой, дисперсионной фазой являются минеральные масла, второй, дисперсной фазой — металлоорганические соединения жирных кислот (мыла), составляющие до 8—10% по весу, а также в небольшом количестве твердые углеводороды, воски и т. п.

Консистентные смазки, полученные как на кальциевой основе (называемые солидолами), так и на натриевой основе (называемые консталинами), не должны содержать свободных органических кислот и вызывать коррозию смазываемых поверхностей. Свободные жирные кислоты и щелочи, вызывая коррозию металлических поверхностей, кроме того действуют на коллоидную структуру консистентной смазки; щелочи вызывают слипание дисперсных частиц — их агрегирование, а кислоты, наоборот, способствуют пептизации смазки — переходу ее из твердой в жидкую фазу. Поэтому свободные кислоты в консистентных смазках абсолютно недопустимы, а щелочи иногда допускаются в незначительных количествах для нейтрализации возможных продуктов окисления.

Возможной причиной, вызывающей коррозионное действие смазки, может быть наличие в ней воды, так как вода является хорошим катализатором окисления смазываемой поверхности металла кислородом воздуха.

Однако попадание влаги в солидолы не опасно, так как кальциевые мыла в смеси с минеральными маслами при попадании в них воды образуют эмульсии второго рода, т. е. масла образуют наружную фазу, а вода внутреннюю, поэтому металлические поверхности, смазанные солидолами, содержащими воду, всегда будут соприкасаться с маслом, а не с водой.

Другое положение будет наблюдаться при смазывании металлических поверхностей консталинами. Натриевые мыла, растворяясь в воде, будут способствовать подведению влаги к металлическим поверхностям. Поэтому применение консталинов во влажной среде или при возможности попадания извне воды недопустимо.

Все вышесказанное о консистентных смазках показывает, что они, так же как и жидкие масла, должны являться средой практически нейтральной в отношении коррозии в ней металлических деталей.

Поверхностная активность смазочного масла особенно важна при граничном трении или при смазке тонкой пленкой; она называется маслянистостью, или смазочной способностью масла. Маслянистость смазочного масла зависит от его способности образовывать прочные адсорбированные пленки на смазываемых поверхностях и связанные с ними относительно толстые сольватные слои смазки, которые разъединяют трущиеся поверхности*.

Акад. П. А. Ребиндер [8] определяет маслянистость как способность металла связывать достаточно толстую и прочную пленку смазочного масла, вызывающую понижение трения и предохраняющую от износа, с одной стороны, и, с другой стороны, сопротивляющуюся различным разрушающим ее воздействиям. В. Д. Кузнецов [9] подчеркивает, что маслянистость смазочного масла является его скрытым свойством, проявляющимся только при наличии трения между двумя твердыми поверхностями, смазанными этим маслом. Необходимо отметить, что общепринятого определения маслянистости нет.

Адсорбционная способность смазочных масел в основном зависит

* Понятие маслянистости, очевидно, включает в себя явления как физической, так и химической адсорбции. Действительно, при смазке активированными маслами, обладающими высокой маслянистостью, часто совершенно невозможно восстановить первоначальную поверхность металла, не удалив его верхнего слоя.

от наличия в них полярных молекул с активными группами (ОН, СООН и т. п.), к которым относятся молекулы жирных кислот, спиртов, альдегидов, кетонов, смол и т. п. веществ, находящихся в маслах в виде загрязнений*.

Однако масла, не содержащие вовсе поверхностно-активных молекул (например, очищенное вазелиновое масло) и состоящие, стало быть, из одних чистых углеводородов рядов C_nH_{2n} или C_nH_{2n+2} , также способны адсорбироваться на металлической поверхности. Эта адсорбция происходит под влиянием поляризации неактивных углеводородных молекул электрическим полем металлической поверхности. Однако адсорбция такого вида молекул не дает прочных адсорбированных пленок на трущихся поверхностях, и эти масла не могут служить надежными смазочными материалами.

Из сказанного следует, что смазочные масла являются поверхностно-активными средами, причем их активность зависит от количества полярных молекул, содержащихся в них**.

Активность различных масел неодинакова, и она может изменяться у одного и того же масла при его эксплуатации. Так, например, при работе масла в двигателе внутреннего сгорания в масле происходят процессы окисления и полимеризации, в результате которых образуются свободные кислоты, смолы, асфальтены и т. п. Особенно подвержены изменению масла растительно-животного происхождения, о чем говорилось выше. Так, например, расщепление глицеридов приводит к значительному увеличению поверхностной активности этих масел за счет появления полярных молекул с гидроксильными и карбоксильными группами.

Поверхностная активность масел является положительным его качеством с точки зрения смазочной техники. Чем больше в масле молекул с активными группами, т. е. чем больше масло активировано, тем выше его маслянистость и тем больше оно снижает трение, особенно в граничной его фазе. Однако здесь необходимо оговориться, что существует определенный оптимум, различный для разных поверхностно-активных веществ, увеличение свыше которого содержания этих веществ в масле не приводит к увеличению его маслянистости.

Зависимость маслянистости от адсорбционной способности поверхностно-активных веществ, содержащихся в масле, подтверждается исследованиями акад. П. А. Ребиндера и Н. А. Калиновской [10] смазывающего действия масел в тонких пленках (адсорбционная смазываемость). Исследования показали, что для большинства металлов*** при смазке тонкой пленкой (адсорбционного порядка толщины) коэффициент трения уменьшается с увеличением концентрации поверхностно-активных веществ в неполярной углеводородной жидкости или воде, причем изотерма смазывающего действия вполне параллельна изотерме адсорбции, и смазывающая способность возрастает по мере перехода от одного поверхностно-активного вещества к другому веществу того же гомологического ряда согласно правилу Траубе.

Это исследование представляет большую ценность, так как оно показало, что при смазке тонкой пленкой основное значение имеют законы адсорбции поверхностно-активных веществ из растворов, их содержащих.

* Необходимо иметь в виду, что адсорбция масел на металлических поверхностях зависит не только от качества масла, но и от физического состояния и химического состава металлических поверхностей.

** Путем пропускания масла через металлический порошок можно адсорбировать на порошке поверхностно-активные молекулы, чем значительно ухудшается смазочное качество масла.

*** Исключение представляет алюминий, ведущий себя аномально: увеличение концентрации поверхностно-активных веществ увеличивает коэффициент трения.

Адсорбированный на металлических поверхностях слой масла редко бывает мономолекулярным; обычно он состоит из нескольких рядов поверхностно-активных молекул. Как показали опыты А. С. Ахматова [11], на поверхности трения металла как бы аккумулируются поверхностно-активные вещества, составляя адсорбционную пленку в несколько десятков молекулярных рядов. Эти поверхностно-активные вещества, по мнению А. С. Ахматова, заполняют микровпадины трущихся поверхностей, приводя этим к нивелировке микропрофиля и делая его идеально гладким, в силу чего снижается трение*.

Адсорбированные полярные вещества из масла на поверхностях трения находятся в квазитвердом состоянии [11]; они создают пленку

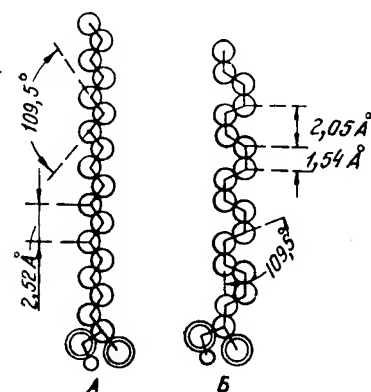


Рис. 1. Схема строения молекул жирных кислот.

с резко анизотропной структурой и довольно совершенной спайностью. Эту пленку трудно пробить перпендикулярно спайности металлическим гребешком микронеровностей трущихся поверхностей, но относительно легко сдвинуть касательно к поверхности, подобно сдвигу колоды карт [12]**. Интересно, что и электрические свойства адсорбированной пленки масла на трущихся поверхностях различны в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Так, адсорбированная пленка, подобно электрическому вентилю, пропускает ток преимущественно в одном направлении [12].

Рассмотрим теперь поведение наиболее характерного поверхностно-активного вещества, растворенного в неактивных углеводородах при его адсорбции на трущихся металлических поверхностях. К таким поверхностно-активным веществам, повышающим маслянистость смазочных масел, относятся прежде всего жирные кислоты, представляющие собою углеводороды, в молекуле которых один атом водорода замещен карбоксильной группой. Молекула жирных кислот имеет специфическую меандровидную форму; на одном ее конце находится карбоксильная группа (COOH), а на другом — метильная группа (CH_3), соединенные цепочкой углеводородных (метиленовых) групп (рис. 1). Молекулы жирных кислот имеют постоянный дипольный момент, носителем которого является карбоксильная группа, причем величина этого момента зависит от положения атома водорода, увеличиваясь при его свободном вращении [14].

Жирные кислоты, содержащиеся в смазочных маслах, могут давать адсорбцию на металлических поверхностях как физического, так и химического характера. Можно предполагать, что физическая адсорбция при нормальных температурах смазочного слоя преобладает над хемосорбцией, так как известно, что при относительно низких температурах наблюдается в основном физическая адсорбция, которая с повышением температуры постепенно уступает место хемосорбции [15].

Хемосорбция характеризуется избирательностью, причем большая интенсивность ее наблюдается в местах с нарушением стехиометричности решетки металла, например, в местах включений, а также на

* Трилля [13] установил возможность образования под влиянием взаимодействия электрического поля металлической поверхности с полярными соединениями адсорбированного слоя, состоящего из 400—500 рядов молекул.

** Работа, необходимая для отделения карбоксильных ориентированных пленок, достигает 9000 кал на грамм-молекулу незамещенной жирной кислоты, а для преодоления сил притяжения в неполярной плоскости всего лишь 1790 кал на грамм-молекулу [13].

пиках микрошероховатости и т. п. [16]. Очевидно, можно в основном ожидать хемосорбцию жирных кислот на металлических трущихся поверхностях в местах повышенных локальных давлений, где развиваются при трении высокие температуры. В этих местах связь карбоксила молекулы жирной кислоты с поверхностными элементами решетки металла обуславливается электронным обменом и носит характер химической связи. Продукты хемосорбции в связи с этим можно рассматривать как своего рода поверхностные химические соединения, дающие монослой металлических мыл.

Выше мы отмечали, что допустимое, согласно существующим нормам, содержание жирных кислот в смазочных маслах практически не вызывает коррозионных явлений на трущихся металлических поверхностях. Однако всякое повышение содержания жирных кислот в смазочном масле, например, под влиянием его окисления, приводит к интенсификации коррозионных процессов, которые, — есть основания ожидать, — начинаются с хемосорбции и образования металлоорганических соединений в монослой.

Вопрос коррозии металлов в углеводородных растворах жирных кислот очень слабо освещен в литературе. Наиболее интересные исследования по этому поводу проведены в последнее время Л. Г. Гиндиным [17—19]. Им исследовалось коррозионное действие на магний, железо и свинец ряда жирных кислот, разведенных в углеводородах [17].

Опыты показали, что скорость коррозии в зависимости от концентрации жирных кислот в углеводородах различна для различных металлов (например, для свинца эта скорость уменьшается с увеличением концентрации в изооктане, а для железа, наоборот, увеличивается). На скорость коррозии влияет характер углеводорода, являющегося растворителем жирных кислот, причем в первые моменты после погружения исследуемого металла в среду скорость коррозии была выше, чем в последующее время. Характерно, что присутствие воды в растворе жирной кислоты в углеводороде не повлияло на скорость коррозии.

Гиндин полагает [17], что скорость коррозии металлов в указанных средах определяется в основном растворимостью продуктов коррозии в растворителе. В том случае, если эти продукты нерастворимы, они играют защитную роль, в случае растворимости этих продуктов коррозионные процессы в растворах жирных кислот в углеводородах значительно ускоряются и, по мнению Гиндина, могут даже стать выше, чем в электролитах, т. е. в водных растворах тех же кислот.

Коррозионные процессы, протекающие в растворах жирных кислот в углеводородах, т. е. в диэлектриках, Гиндин объясняет электрохимическим характером этих процессов, что подтверждается действием в среде 1,5-н. изооктанового раствора уксусной кислоты макроэлемента железо—магний [18], а также работой в этой среде обычного гальванического элемента [19].

По мнению Гиндина, при коррозионном процессе металлов в растворах жирных кислот в углеводородах большую роль играют продукты коррозии, т. е. те металлические мыла, которые образуются в начале процесса, очевидно, благодаря хемосорбции. Хемосорбции же предшествует физическая адсорбция, интересующая нас как понизитель прочности.

Мы обратили здесь внимание на химическое влияние жирных кислот, содержащихся в смазочных маслах, на металлические детали, находящиеся в них. Однако нас в основном будет интересовать физико-химическое влияние этих веществ на металлы, не приводящее к изменению химических свойств поверхности. К таким явлениям относится физическая адсорбция жирных кислот на поверхности стали, которая, как мы уже говорили, преобладает при обычных температурах смазочного слоя.

Молекулы жирных кислот при полном насыщении адсорбционного слоя ориентируются на металлических поверхностях перпендикулярно к поверхности, так что карбоксильная группа оказывается прикрепленной к металлу, а углеводородная цепочка выходит в слой масла. Образованный таким образом ворс, или, как его называют, „частокол“, из молекул поддается воздействию внешних усилий, деформируясь под их влиянием. Однако как бы ни была сформирована молекула, ее меандрированная форма является наиболее устойчивой, как соответствующая минимуму потенциальной энергии, поэтому эти молекулы всегда стремятся восстановить свою первоначальную форму.

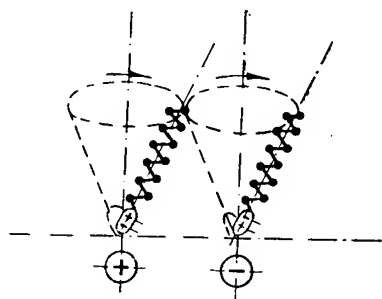


Рис. 2. Схема тепловых колебаний молекул жирных кислот, адсорбированных на металле (Ахматов).

Адсорбированные металлической поверхностью молекулы жирных кислот совершают тепловые колебательные движения, описывая своими осями поверхности конусов с вершинами в месте прикрепления карбоксильных групп к металлу, а атомные группы CH_2 совершают ротационные движения [14] (рис. 2).

При адсорбции молекулы жирных кислот легко могут мигрировать по поверхности, не отрываясь от нее, проявляя тем большую подвижность, чем выше температура. Так как при адсорбции сни-

жается энергетический уровень адсорбента, то термодинамически обоснованным является стремление поверхностно-активных молекул жирных кислот покрыть все имеющиеся поверхности вплоть до поверхностей узких и длинных ультрамикротрещин. Свойство поверхностно-активных молекул легко мигрировать по поверхности и проникать в самые узкие трещины вплоть до глубины, где размеры молекул начинают препятствовать их дальнейшему продвижению, является для нас важным фактором при рассмотрении влияния поверхностно-активных веществ на усталостную прочность стали.

Молекулы жирных кислот, находящиеся в углеводородной среде (смазочном масле), склонны к ассоциации; под влиянием электростатической (квадрупольной) и водородной связей они могут образовывать парные молекулы, называемые координационными димерами. Кроме того, молекулы жирных кислот склонны к образованию гигантских нитевидных макромолекул, играющих большую роль при образовании масляного слоя между трущимися поверхностями. Эти макромолекулы образуются за счет взаимодействия как карбоксиллов и метильных групп, так и всей углеводородной части цепи [14].

Рентгенографические исследования граничных слоев смазки на трущихся металлических поверхностях показывают, что эти слои построены из параллельных друг другу нитевидных макромолекул, причем взаимодействующие карбоксиллы и метильные группы лежат в плоскостях, касательных к поверхности металла. Все слои, кроме первого к металлу, построены из взаимодействующих димеров.

Первый слой, как уже говорилось выше, состоит из „частокла“ отдельных молекул жирных кислот, не соединенных в димеры. Объясняется это тем, что при соприкосновении димеров с металлической поверхностью под влиянием ее потенциала, который выше энергии связи димеров, происходит разделение димеров на отдельные молекулы и их ориентированная фиксация на металлической поверхности.

Силовое поле металлической поверхности действует лишь на первый ряд адсорбированных молекул. Во втором ряду, представляющем собою зеркальное отражение первого ряда, по всей вероятности действуют

силы связи дисперсионного типа [14]. Как уже говорилось, второй ряд состоит из димеров, а не из отдельных молекул жирных кислот. Последующие ряды строятся на аналогии со вторым, образуя пограничный адсорбционный мультислой.

Соприкосновение между отдельными рядами в мультислое происходит по метильным группам, которые являются естественными плоскостями спайности, так как они связаны между собою лишь слабыми дисперсионными силами.

Взаимодействие между ориентированными перпендикулярно к поверхности адсорбента димерами в мультислое происходит за счет дисперсионных сил; в связи с аддитивностью их действия и параллельностью размещения цепей взаимодействие между димерами достигает довольно значительной величины, причем энергия связи соседних молекул растет с удлинением углеводородной части цепи. Последнее мы наблюдаем при увеличении прочности адсорбированных пленок, полученных из высших гомологов жирных кислот.

Ориентированные на металлической поверхности молекулы жирных кислот могут сольватироваться неактивными углеводородными молекулами масла и таким образом образовывать относительно толстые слои смазки, разъединяющие трущиеся поверхности. Эти слои включают в себя мультислой адсорбированных поверхностно-активных веществ (жирных кислот) и сольватированные около них углеводородные молекулы смазочного масла. Эти последние молекулы, так же как и молекулы жирных кислот, могут соединяться в гигантские макромолекулы, ориентированные параллельно току масла в смазочном слое, вызванном относительным перемещением трущихся поверхностей. Таким образом, за мультислой адсорбированных молекул жирных кислот наблюдается определенная текстура смазочного слоя, обуславливающая процессы переходного трения от граничного к динамическому и названная А. С. Ахматовым нематическим механизмом переходного режима трения [14].

Интересно, что и консистентные смазки, имеющие аморфное строение в своей массе, в тонком слое, нанесенном на трущиеся поверхности, приобретают определенную структуру; их молекулы приобретают порядок, описанный выше.

Б. В. Дерягин [20], исследуя сольватные слои, образующиеся при смазке (о которых речь шла выше), нашел, что сольватные слои двух смазанных поверхностей, приходя в соприкосновение и взаимно налагаясь при достаточном сближении поверхностей, развивают давление, однозначно зависящее от расстояний между поверхностями. Это давление стремится раздвинуть сближающиеся поверхности, как бы расклинить их.

Исследования Б. В. Дерягина и его сотрудников показали, что расклинивающее действие сольватных слоев зависит от толщины слоя, резко увеличиваясь при его уменьшении. Введение в смазочное масло поверхностно-активных веществ (жирных кислот) также увеличивает расклинивающее действие*.

Расклинивающий эффект сольватных слоев Дерягина представляет несомненный интерес для наших исследований влияния поверхностно-активных веществ на усталостную прочность стали.

Кратко разобрав механизм смазочного действия при граничной смазке, мы проиллюстрировали роль поверхностно-активных веществ, находящихся в масле, и их поведение при граничном трении или смазывании тонкой пленкой. Как видно, эти вещества необходимы для образования мультислоя, разъединяющего трущиеся поверхности.

* Необходимо отметить, что расклинивающие давления исследовались в статических условиях при отсутствии скольжения.

Различные масла содержат различное количество поверхностно-активных веществ. Наибольшее их количество содержат масла растительно-животного происхождения; минеральные масла значительно меньше активированы, и для улучшения их маслянистости к ним часто прибавляют масла растительного происхождения, получая так называемые компаундированные масла, либо активируют их различными присадками с дифильным строением молекулы, содержащей в себе полярные группы OH , COOH , NH_2 , NO_2 и т. п.

Для улучшения смазочной способности минеральных масел применяются главным образом присадки в небольших количествах жирных кислот и особенно непереломной одноосновной олеиновой кислоты ряда $\text{C}_n\text{H}_{2n-1}\text{COOH}$.

Однако исследования ряда авторов показали, что улучшают качества минеральных масел не только жирные кислоты, но и нитрилы, амиды, кетоны и другие органические вещества, которые добавляются в незначительных количествах к минеральным маслам. Исследования Трилля [9] показали, что весьма поверхностно-активной добавкой к смазочным маслам является добавка твердых глицеридов (трипальметина, тристеарина и т. п.), у которых активным является глицериновый радикал.

Гарди [9], измеряя коэффициент статического трения на машине своей конструкции, нашел, что добавление 0,5% олеиновой кислоты к минеральному маслу снижает коэффициент трения на 19%. Им же был исследован ряд веществ и найдено, что жирные кислоты в качестве добавки к минеральным маслам дают наиболее низкий коэффициент статического трения по сравнению со спиртами и парафинами.

Дилей [21], измеряя величины коэффициента статического трения, нашел, что жирные кислоты, добавляемые к маслу даже в количестве 0,1%, значительно снижают коэффициент статического трения, причем с увеличением концентрации жирных кислот снижение коэффициента трения замедляется.

К. К. Папок и К. И. Когтева [5] показали, что коэффициент статического трения авиамасла СО, равный 0,117, при добавке 0,5% олеиновой кислоты снизился до 0,090. Интересно, что увеличение процента содержания олеиновой кислоты в масле до 5% снизило коэффициент статического трения также до величины 0,090.

Исследования Б. В. Дерягина и его сотрудников [22] маслянистости смазочных масел на приборе Дерягина показали, что время, в течение которого удерживается смазочная пленка на трущихся поверхностях, значительно увеличивается при присадке к неактивному вазелиновому маслу олеиновой кислоты. Характерно, что коэффициент трения при этом снижается незначительно.

По мнению Б. В. Дерягина [23], присадка поверхностно-активных веществ типа жирных кислот к неполярным углеводородным средам (например, вазелиновое масло) приводит к появлению ориентации молекул как поверхностно-активного вещества, так и неполярных молекул масла, чем и увеличивается грузоподъемность граничной пленки.

Влияние присадок, снижающих коэффициент статического трения у минеральных масел, согласно исследованиям многих авторов, сохраняется при самых различных нагрузках. Однако вышеприведенные исследования влияния присадок поверхностно-активных веществ, проведенные при граничном трении на машинах по определению коэффициента статического трения, не дают представления о том, как эти присадки будут влиять на кинетическое трение*. При исследовании масля-

* Хотя существует мнение [23], что коэффициент кинетического трения мало зависит от скорости, за исключением тех случаев, когда процесс трения вызывает какие-либо изменения в адсорбционном слое. Согласно этой точки зрения, коэффициент статического и кинетического трения мало отличаются друг от друга.

нистости масел в динамических условиях [24] оказалось, что присадки малых количеств поверхностно-активных веществ (0,5% $C_{17}H_{33}COOH$ или 1% $C_{17}H_{35}COOH$) понижают коэффициент кинетического трения по сравнению с чистым маслом, прибавка же больших количеств поверхностно-активных веществ (2% $C_{17}H_{33}COOH$, 10% брайстока), наоборот, повышает коэффициент трения.

Этими исследованиями выяснено, что присадки поверхностно-активных веществ к смазочным маслам при их работе в динамических условиях сказываются как при тонких пленках, так и при относительно толстых пленках смазочного масла. Некоторые поверхностно-активные вещества (например, стеариновая кислота) уменьшают коэффициент кинетического трения при тонких пленках и повышают его при толстых.

Характерно, что олеиновая кислота, применяемая как присадка к маслам и повышающая их маслянистость, снижает коэффициент кинетического трения только при малых добавках (0,5%), увеличение же процента олеиновой кислоты в смазочном масле до 2 уже значительно повышает коэффициент трения. Однако чем выше было содержание олеиновой кислоты в масле, тем чище оказывались трущиеся поверхности, т. е. увеличение процентного содержания олеиновой кислоты в масле содействовало приработке цапфы ко вкладышу.

В связи с последним интересно отметить точку зрения акад. П. А. Ребиндера на роль присадок поверхностно-активных веществ к смазочным маслам [8,25]. Акад. П. А. Ребиндер указывает, что активные смазки играют двойственную роль: во-первых, вызывают снижение трения, а стало быть и общего износа трущихся поверхностей благодаря повышению маслянистости масел, во-вторых, вызывают увеличение износа (при определенных условиях) в связи с адсорбционно-диспергирующим действием поверхностно-активных веществ.

Последнее объясняется проникновением поверхностно-активных веществ в деформированной зоне цапфы и вкладыша в имеющиеся на поверхности металла ультрамикротрещины, где эти поверхностно-активные вещества вызывают адсорбционно-расклинивающий эффект Ребиндера, приводящий к пластическому износу и отрыву отдельных частиц металла. Этот износ металла, согласно исследованиям П. А. Ребиндера и его сотрудников, усиливается с увеличением удельного давления, так как при этом увеличивается зона предразрушения.

Из-за шероховатости трущихся поверхностей в отдельных элементах поверхности при среднем невысоком удельном давлении в подшипнике могут наблюдаться весьма высокие локальные давления. Смазка в этих местах при недостаточной ее активности будет выжиматься, и при отсутствии достаточного количества поверхностно-активных веществ может произойти заедание и сваривание элементов трущихся поверхностей. При наличии поверхностно-активных веществ тонкая адсорбционная пленка, составленная из них, не выжмется, а, разъединяя трущиеся поверхности, будет проникать в ультрамикротрещины зоны повышенного давления, способствуя ее износу при высокой степени измельчения и быстрой прирабатываемости поверхностей.

П. А. Ребиндер [25] указывает на положительную роль активации смазки, которая повышает маслянистость масла, но кроме того делает смазку антиаварийной, ускоряющей прирабатываемость; способствуя притирке и сглаживанию выступов, такая смазка снимает высокие давления всюду, где они образуются. Поверхностно-активные вещества, добавляемые к смазочным маслам, особенно полезны в период приработки и в моменты высоких нагрузок, могущих вызвать заедание.

К сказанному необходимо добавить, что в местах с повышенным давлением обычно развиваются высокие температуры, способствующие, как мы уже отмечали выше, хемосорбционным процессам. Последние вызовут „химический“ износ этих мест, аналогичный тому, который

имеет место при процессах „химической“ полировки металлов и стекол по И. В. Гребенщикову.

Переходя к рассмотрению качеств смазочных масел, как охлаждающих сред, необходимо отметить, что они невысоки, так как теплоемкость масла невелика, передача тепла теплопроводностью от нагретой циклически нагруженной детали через масло почти исключается в силу низкого коэффициента теплопроводности масла*, а конвекционная передача тепла затрудняется толстыми пограничными слоями, образующимися на теплоотдающей поверхности металла. Последнее объясняется большей кинематической вязкостью масла, в силу чего образуются толстые пограничные слои, целиком находящиеся в ламинарном состоянии. Улучшение теплоперехода от нагретой детали к маслу возможно при увеличении скорости токов масла около детали, что снижает толщину пограничного слоя и улучшает конвекционный обмен. Состояние поверхности (шероховатости) циклически нагруженной детали также влияет на теплопереход; при наличии шероховатости, могущей вызвать завихрение масла около поверхности, теплопереход улучшается**.

Резюмируя рассмотрение вопроса о смазочном масле как о среде, могущей влиять на усталостную прочность стали, необходимо признать, что это влияние в основном зависит от поверхностной активности смазочного масла и будет происходить в основном под воздействием физической адсорбции поверхностно-активных элементов масла. Однако наряду с этим влиянием не исключена также возможность коррозионного влияния, развивающегося на основе хемосорбционных процессов, но оно, несомненно, имеет второстепенное значение в снижении выносливости стали в смазочных маслах. Охлаждающее влияние масла также невелико и в основном наблюдается в зоне ограниченной выносливости.

3. Влияние смазочных масел на усталостную прочность стали

Выше мы показали, что смазочные масла практически коррозионно безопасны, но обладают высокой адсорбционной способностью. Из смазочных масел на поверхности металлических деталей адсорбируются поверхностно-активные элементы этого масла, причем эта адсорбция в основном носит характер физической адсорбции и только в отдельных случаях возможны хемосорбционные процессы (в местах с повышенными температурами и т. п.).

Адсорбционные процессы, протекающие на циклически нагруженных стальных деталях, находящихся в масляной среде, позволили предположить о снижении их усталостной прочности под влиянием адсорбционно-расклинивающего эффекта Ребиндера, что и было подтверждено рядом наших опытов, результаты которых приведены ниже.

С целью выяснения влияния смазочных масел на усталостную прочность стали нами были предприняты исследования различных хромистых сталей в отожженном и закаленном состоянии, которые циклически нагружались в жидких минеральных и растительных смазочных маслах, консистентных смазках и активированных минеральных маслах.

Выбор хромистых сталей был обусловлен желанием снизить влияние коррозионных процессов на усталостную прочность стали в среде смазочного масла, особенно в среде активированного жирными кислотами

* Коэффициент теплопроводности масла находится в пределах 0,003—0,00045 кал/см·сек·град и мало изменяется с температурой. Теплоемкость колеблется в пределах 0,4—0,5 кал/г·град [9].

** Среды II группы обладают лучшими охлаждающими качествами, чем масла. Основной компонент сред II группы — вода имеет теплоемкость в 2,5 раза, а теплопроводность в 5 раз большую, чем у масла [9]. У сред II группы пограничный слой почти всегда находится в турбулентном состоянии и не оказывает сопротивления прохождению тепла, как это мы имеем у масла [26].

масла. Хром, как известно, увеличивает стойкость стали в отношении коррозии, которая, как видно из предыдущего, хотя и незначительна в растворах жирных кислот в углеводородах, но все же может повлиять на картину адсорбционного снижения усталостной прочности.

Нами исследовалась хромистая сталь 20Х (перлит—феррит), сталь 40Х в закаленном и отожженном состоянии (мартенситная, трооститная и сорбитная структуры для закаленных сталей и перлит-ферритная структура для отожженной стали), а также шарикоподшипниковая сталь ШХ-15 в закаленном состоянии (структура, полученная изотермической обработкой, представляла скрытокристаллический мартенсит + карбиды).

В табл. 1 приведены результаты испытаний указанных сталей, проведенных в механической, динамической и металлографической лабораториях Института строительной механики АН УССР.

Т а б л и ц а 1

Марка стали	Структура	σ_B (кг/мм ²)	σ_s (кг/мм ²)	σ_{-1} (кг/мм ²)	δ_{10} (%)	ψ (%)	H_v
20Х	Перлит—феррит	52	33	28,9*	24	70	127
40Х	Перлит—феррит	65	31	31,4**	16	65	137
	Сорбит	102	88	50,2*	11,25	64	262
	Троостит	175	—	88,3*	5,15	47	429
	Мартенсит	208	—	77,5*	6	40	512
ШХ-15	Скрытокристаллический мартенсит+карбиды	219	—	95*	—	—	627

Указанные структуры получались следующей термообработкой. Перлит-ферритная структура стали 40Х была получена путем отжига в течение 30 мин. при температуре $t = 1150^\circ \text{C}$. Сорбитная структура этой же стали получалась закалкой в масло при $t = 870^\circ \text{C}$ с выдержкой 20 мин. с последующим отпуском в течение 2 часов при температуре 560°C . Трооститная структура получалась закалкой в масло при $t = 870^\circ \text{C}$ с выдержкой 20 мин. с последующим отпуском в течение 2 часов при температуре 350° и вторичным отпуском в течение 7 часов (в среде масла) при $t = 320^\circ \text{C}$. Мартенситная структура получалась закалкой в масло при $t = 870^\circ \text{C}$ с выдержкой 20 мин. с последующим отпуском в течение 2 часов при $t = 200^\circ \text{C}$. Образцы из стали ШХ-15 структуры скрытокристаллического мартенсита + карбиды были получены изотермической закалкой от температуры 840°C в масло температуры 130°C с выдержкой в нем в течение 120 часов.

Образцы испытывались на усталость в различных жидких поверхностно-активных средах, а также в такой коррозионной среде, как дистиллированная вода***. Результаты этих испытаний приведены

* Образцы, шлифованные до 9 класса 9а разряда чистоты поверхности.

** Образцы, шлифованные до 10 класса чистоты поверхности.

*** Исследования проводились в динамической лаборатории Института строительной механики АН УССР на усталостных машинах типа „НУ“ Министерства приборостроения СССР, работающих при симметричном цикле (изгиб при вращении) с приспособлениями, позволяющими помещать испытуемый образец в различные жидкие среды. Вращающийся в среде циклически нагруженный образец энергично перемешивал среду, обогащая ее кислородом воздуха. Частота нагружения 2840 циклов в минуту.

Таблица 2

Группы среды	Название среды	Предел усталости σ_{-1} кг/мм ² и коэффициент циклической прочности при влиянии среды $\beta\%$						сталь ШХ-15 мартенсит, 9 класс чистоты поверхности
		сталь 20X пер- лит—феррит, 9 класс чистоты поверхности	перлит—фер- рит, 10 класс чистоты поверхности	сорбит, 10 класс чистоты поверхности	сорбит, 4 класс чистоты поверхности	троостит, 9 класс чистоты поверхности	мартенсит, 9 класс чистоты поверхности	
I $N=5 \cdot 10^6$	Воздух	28,9 $\beta=100$	31,4 $\beta=100$	52,4 $\beta=100$	49,4 $\beta=100$	88,3 $\beta=100$	77,5 $\beta=100$	95,0 $\beta=100$
	Гептан	—	—	—	—	—	—	96,1 $\beta=101$
	Вазелиновое масло	28,9 $\beta=100$	—	—	—	88,3 $\beta=100$	—	—
II $N=2 \cdot 10^7$	Дистиллированная вода	19 $\beta=66$	20,4 $\beta=66$	23 $\beta=46$	—	38,4 $\beta=43,5$	13 $\beta=17$	35,1 $\beta=37$
III $N=10^7$	Вазелиновое масло +0,25% $C_{16}H_{33}OH$	$\beta=97^*$	—	—	—	83,2 $\beta=94,3$	—	—
	Вазелиновое масло +1% $C_{17}H_{35}COOH$	27,4 $\beta=95$	—	—	—	—	—	—
	Масло МС	27,9 $\beta=96,5$	29 $\beta=92,5$	—	—	—	—	92,6 $\beta=97,5$
	Отработанное МС	—	29 $\beta=92,5$	—	—	—	—	—
	МС+2% $C_{17}H_{35}COOH$	26,9 $\beta=93$	25,5 $\beta=81,5$	42,1 $\beta=80$	41,8 $\beta=85$	78,2 $\beta=88,5$	67 $\beta=87$	84,7 $\beta=89$
	Касторовое масло	—	—	—	41,3 $\beta=84$	—	—	—
	Солидол	—	—	—	—	—	—	89,7 $\beta=94,5$
	Консталин	—	—	—	—	—	—	89,54 $\beta=94,6$

* Определено при $n = 1500$ циклов в минуту.

в табл. 2, в которой даны пределы усталости испытанных сталей и коэффициенты циклической прочности при влиянии среды,

$$\beta = \frac{\sigma_{-1} \text{ среда}}{\sigma_{-1} \text{ воздух}} \cdot 100 \%$$

Как видно из табл. 2, среды, относящиеся к первой группе, либо вовсе не воздействуют на предел выносливости стали, либо, охлаждая циклически нагруженные образцы, незначительно повышают их выносливость (гептан [3]). Все среды, относящиеся к третьей группе (поверхностно-активные среды), закономерно снижают предел выносливости стали, причем это снижение зависит от вида стали и от поверхностей

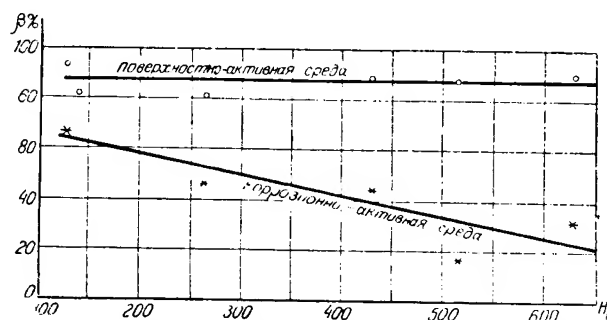


Рис. 3. Стойкость хромистых сталей к адсорбционной и коррозионной усталости в зависимости от твердости.

активности среды. Минеральное неактивизированное смазочное масло незначительно снижает предел усталости (от 3 до 8%); растительное смазочное масло, как более поверхностно-активное, снизило предел усталости на 16%. Активация масла жирными кислотами приводит к снижению предела усталости до 20%. Это снижение происходит в основном под влиянием физической адсорбции, хотя хемосорбционные процессы в этом случае не исключены. При активации нейтрального вазелинового масла цетиловым спиртом ($C_{16}H_{33}OH$) получается среда абсолютно коррозионно-неактивная, воздействующая на циклически нагруженную сталь только вследствие физической адсорбции. Эта среда дала снижение предела усталости из 3—6%. Консистентные смазки снизили предел усталости стали ШХ-15 на 5,5%. Характерно, что отработанное масло МС не изменило своих поверхностно-активных качеств после работы в двигателе, оказав такое же влияние на предел усталости стали 40Х, как и свежее масло.

Коррозионно-активная среда (дистиллированная вода) дала для всех сталей значительное снижение предела усталости, зависящее от времени пребывания металла в среде под нагрузкой*.

На диаграмме рис. 3 представлены кривые, показывающие влияние II и III групп жидких сред на выносливость стали в зависимости от твердости. На оси ординат отложены величины коэффициента циклической прочности стали при влиянии среды, а по оси абсцисс — твердость испытанной стали. Испытания проводились в активированном олеиновой кислотой масле МС и в дистиллированной воде, обогащенной кислородом воздуха.

Как видно из диаграммы рис. 3, снижение предела усталости под влиянием поверхностно-активной среды не зависит от твердости стали,

* В таблице приведены данные для условного предела коррозионной усталости, полученного на базе $N = 20 \cdot 10^6$ циклов нагружений.

снижение же под влиянием коррозионно-активной среды тем выше, чем тверже сталь. Зависимость снижения выносливости стали от ее твердости под влиянием коррозионной среды похожа на зависимость снижения выносливости стали

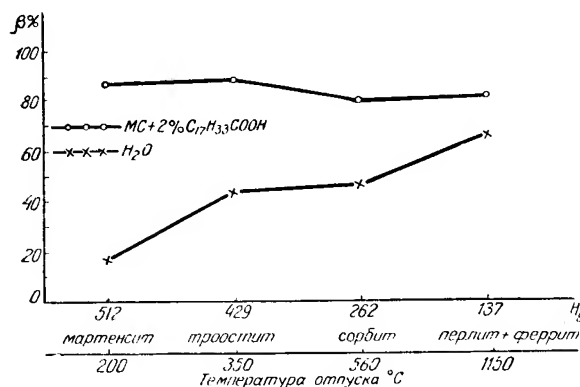


Рис. 4. Стойкость стали 40Х к адсорбционной и коррозионной усталости в зависимости от термообработки.

под влиянием концентраторов напряжения.

На рис. 4 приведена диаграмма, показывающая относительную потерю выносливости стали 40Х под влиянием различных сред в зависимости от термообработки стали. Диаграмма показывает, что термообработка стали 40Х практически не повлияла на снижение выносливости при воздействии поверхностно-активной среды; при воздей-

ствии же коррозионно-активных сред влияние термообработки значительно.

Характерно, что в последнем случае величина потери выносливости не согласуется с потерей веса под влиянием коррозионной среды, что видно из рис. 5, где приведена диаграмма потери в весе эвтектоидной стали различной структуры, заимствованная у Г. В. Акимова [27].

Приведенные диаграммы позволяют предположить, что фактор снижения выносливости в поверхностно-активных средах (адсорбционно-расклинивающий эффект Ребиндера) действует в микрообъемах, меньших размера зерна, в силу чего не зависит от структуры стали.

Фактор снижения выносливости в коррозионно-агрессивных средах зависит от структуры стали и, очевидно, действует в микрообъемах, больших размера зерна. Этот фактор, как показывает сравнение диаграмм рис. 4 и 5, не зависит от общей коррозии, протекающей в среде.

Высказанные соображения позволяют предполагать, что поверхностно-активные среды влияют на напряжения второго и третьего рода, в то время как коррозионно-активные оказывают влияние на напряжения первого рода.

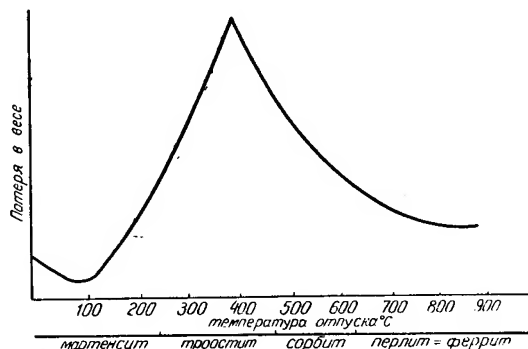


Рис. 5. Потеря в весе стали (0,9% С) в коррозионной среде в зависимости от термообработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Карпенко, ДАН УРСР, № 3, 6, 1949; ДАН СССР, т. 73, № 6, 1950; „Заводская лаборатория“, № 8, 1950; ДАН СССР, т. 74, № 1, 1950.
2. П. А. Ребиндер, Юбилейный сборник АН СССР, 1947, стр. 533.
3. Г. В. Карпенко, И. И. Ищенко та И. А. Малиновська, ДАН УРСР, № 5, 1952.
4. Кудрявцев, Черняк, „Вестник металлопромышленности“, № 12, 1939.
5. К. К. Папок, П. А. Рагозин, Авиационные топлива и масла, 1940.

6. А. К. Зайцев, Основы учения о трении, износе и смазке машин, ч. IV, 1948.
7. Н. П. Черножуков, Производство масел и присадки к маслам, 1944.
8. П. А. Ребиндер и Н. И. Петрова, Физико-химические основы явлений износа трущихся поверхностей и смазки при высоких давлениях, Сб. „Трение и износ в машинах“, т. I, 1939.
9. В. Д. Кузнецов, Физика твердого тела, т. III, 1944.
10. П. А. Ребиндер, Н. А. Калиновская, Сб. „Исследования в области прикладной физико-химии поверхностных явлений“, 1936.
11. А. С. Ахматов, Граничный смазочный слой, как квазитвердое тело, Сб. „Трение и износ в машинах“, т. III, 1949.
12. М. Л. Голдовский, Сб. „Трение и износ в машинах“, т. II, 1940.
13. Сборник ЦИСОН Главнефти „Смазочная способность масла“, 1936.
14. А. С. Ахматов, Силы атомно-молекулярных взаимодействий, формирование и структура граничных атомных слоев, Сб. „Трение и износ в машинах“, т. III, 1949.
15. И. И. Жуков, Коллоидная химия, 1949.
16. С. З. Рогинский, Адсорбция и катализ на неоднородных поверхностях, 1948.
17. Л. Г. Гиндин, ДАН СССР, т. 80, № 3, 1951.
18. Л. Г. Гиндин, ДАН СССР, т. 73, № 3, 1950.
19. Л. Г. Гиндин, ДАН СССР, т. 74, № 2, 1950.
20. Б. Дерягин, М. Кусаков, Изв. АН СССР, серия химическая, № 5, 1937.
21. Арчбют и Дилей, Трение, смазка и смазочные материалы, 1934.
22. Б. В. Дерягин и др., Сб. „Трение и износ в машинах“, т. I, 1939.
23. Б. В. Дерягин, Сб. „Вопросы машиноведения“, 1950.
24. К. С. Рамайн и А. И. Ильюшина, Экспериментальное исследование смазочных масел с присадками, улучшающими маслянистость, Сб. „Трение и износ в машинах“, т. I, 1939.
25. П. А. Ребиндер, Сб. „Трение и износ в машинах“, т. II, 1940.
26. П. И. Орлов, „Техника воздушного флота“, № 4, 1935.
27. Г. В. Акимов, „Теория и методы исследования коррозии металлов“, 1945.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, РАБОТАЮЩИХ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Г. В. Корнеев

В статье излагается разработанная автором методика экспериментального исследования прочности элементов стальных конструкций, работающих при нерегулярных переменных нагрузках, позволяющая значительно шире, чем это проводится в настоящее время, изучать прочность и долговечность конструкций. В частности рассмотрены следующие вопросы:

1. Условия перехода от характеристик прочности металла к характеристикам прочности элементов конструкций.
2. Контактные приборы, сконструированные автором, для регистрации чисел повторения переменных напряжений и амплитуд напряжений в элементах стальных конструкций во время их эксплуатации.
3. Методика оценки прочности и долговечности элементов конструкций по данным эксплуатационных испытаний.

Введение

Рост технического прогресса нашей социалистической родины требует совершенствования машин и сооружений, уточнения запасов прочности и развития методов расчета. В этом направлении ведут творческую работу многие ученые, инженеры и передовые рабочие. Но несмотря на все новые и новые достижения в методах расчета и проектирования, вопросы о величинах расчетных нагрузок и коэффициентов запаса прочности разработаны недостаточно.

Конструкции при вводе их в строй после изготовления или реконструкции редко проверяются на прочность под действием эксплуатационных нагрузок. Многие из них работают вполне надежно, некоторые же через непродолжительный период эксплуатации выходят из строя.

Не испытав конструкцию в условиях ее службы, т. е. при самых разнообразных режимах нагружения, нельзя сказать, насколько она прочна и долговечна. Не сопоставив данные расчета с данными испытаний, нельзя оценить правильность расчетных методов.

Многие машины и сооружения находятся под действием неравномерных переменных нагрузок, вызывающих в их элементах самые разнообразные переменные напряжения. Неравномерность в нагружениях характерна для таких конструкций, как подъемные краны, транспортеры, экскаваторы, мосты, корабли и пр. Как велика неравномерность действующих сил и по каким законам в реальных условиях эксплуатации изменяются нагружения в элементах многих существующих конструкций, достоверно не известно. Сплошь и рядом нагрузки носят неустановившийся характер с возможными частыми или редкими перегрузками. Фактические нагружения конструкций столь разнообразны, что не всегда

при проектировании можно предвидеть наиболее опасные случаи из них, поэтому совершенно очевидно, что существуют расхождения расчетных данных с действительными, приводящие либо к завышенному запасу прочности и увеличенному расходу материалов, либо к понижению прочности и преждевременному выходу конструкции из строя.

Расчет стальных конструкций, подверженных переменным нагрузкам, часто ведется по статическим нагрузкам, и это несоответствие стремятся исправить путем умножения статической нагрузки на коэффициенты, величины которых не всегда точно известны.

Переменные напряжения, действующие в элементах конструкций, иногда сравнивают с усталостными характеристиками материала, пренебрегая факторами различия между элементом конструкции и лабораторным образцом: концентрацией напряжений, чистотой обработки, влиянием коррозии и несоответствием размеров лабораторного образца и элемента конструкции (т. е. масштабным фактором).

Эти факторы почти не влияют на характеристики статической прочности, но сильно влияют на прочность при переменных нагрузках, и если в элементе конструкции будут действовать напряжения, не превышающие предел упругости, но превышающие предел усталости, и числа их повторений будут больше предельных, то эти напряжения могут вызвать усталостные разрушения.

Условия перехода от характеристик прочности металла к характеристикам прочности элементов конструкций

Многократное изменение напряжений, превышающих некоторый предел, вызывает в материале явления прогрессивного разрушения, называемые усталостью материала.

Зависимость между предельными напряжениями и числами циклов их повторений до разрушения материала характеризуется усталостной кривой. Ни одно напряжение, выходящее за пределы этой кривой, не может повториться больше предельного числа раз.

Недогрузочные напряжения обычно увеличивают усталостную прочность стали, но при их малых величинах, меньших некоторых значений, называемых „критическими“, упрочнение не происходит.

Перегрузочные напряжения иногда упрочняют сталь, но чаще разупрочняют. Это зависит от их величин и чисел повторений.

Выяснение влияния совместного действия перегрузок и недогрузок на долговечность стали является весьма важной задачей, так как многие конструкции работают при нерегулярном режиме изменения напряжений.

Испытания на долговечность стальных образцов при многократных чередованиях перегрузочных напряжений производились В. М. Бахаревым*. Испытания показали, что последовательность действия перегрузочных напряжений разной величины при большом числе чередований перестает заметно влиять на изменение долговечности.

С. В. Серенсен** приходит к выводу, что при действии перегрузочных напряжений, вызывающих многоступенчатое изменение величины амплитуды, условие долговечности может быть выражено так:

$$\frac{N_1}{N_1'} + \frac{N_2}{N_2'} + \frac{N_3}{N_3'} + \dots + \frac{N_k}{N_k'} = 1, \quad (1)$$

где $N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_k$ — общее число циклов перегрузочных напряжений за весь процесс переменного нагружения до разрушения;

* В. М. Бахарев, Об утомляемости сталей при повторных перегрузках, Труды ЦИАМ, № 91, 1945.

** С. В. Серенсен, Об оценке долговечности при изменяющейся амплитуде переменных напряжений, „Вестник машиностроения“, № 7—8, 1944.

$N_1', N_2', N_3', \dots, N_k'$ — циклические долговечности при перегрузочных напряжениях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_k$ (соответственно индексам).

В практике эксплуатации машин и сооружений имеют место перебегающие многоступенчатые нагрузки с большим числом их чередований. В связи с этим при перегрузочных напряжениях уравнение (1) позволяет определить долговечность элементов конструкций.

Кроме указанного, необходимо отметить, что разрушение при переменных нагрузках почти всегда начинается в местах концентрации напряжений; такими местами являются резкие изменения сечений, отверстия, неровности поверхностей, царапины, вмятины и пр. Концентрация напряжений может возникнуть также и при наличии внутренней неоднородности металла (шлаковых включений, пузырей, внутренних трещин и пр.).

Влияние концентрации напряжений характеризуется эффективным коэффициентом концентрации напряжений, устанавливаемым обычно экспериментальным путем. Значения этих коэффициентов можно найти в трудах С. В. Серенсена, И. А. Одингга, Г. В. Ужика, И. В. Подзолова и др., а также в справочниках и в листках для конструктора, печатаемых в журнале „Вестник машиностроения“.

Элементы конструкций обычно выполняются из прокатной стали в состоянии поставки, т. е. поверхность их после проката не обрабатывается. Поверхностный слой элемента конструкции является наиболее напряженным и он в основном определяет усталостную прочность при переменных нагрузках. Риски и царапины, имеющиеся на поверхности элемента конструкции, действуют как надрезы, около которых концентрируются напряжения, снижающие прочность. Мягкие углеродистые стали менее чувствительны к поверхностным повреждениям по сравнению с высокоуглеродистыми и легированными.

Влияние состояния поверхности на сопротивление усталости сталей, имеющих различное временное сопротивление, характеризуется диаграммами, приведенными в трудах С. В. Серенсена *, А. И. Самохоцкого **, а также в листках для конструктора.

На усталостную прочность стали влияет также и масштабный фактор. Вероятность наличия опасных дефектов в крупных деталях значительно больше, чем в мелких.

Влияние абсолютных размеров оценивается коэффициентом, который определяется путем целого ряда испытаний на усталость различных по величине лабораторных образцов. В энциклопедическом справочнике „Машиностроение“ приведены диаграммы для учета масштабного фактора.

Необходимо также учесть влияние коррозии на усталостную прочность стали, так как в стальных конструкциях, работающих при переменных нагрузках, усталостные трещины в условиях коррозионной среды возникают и развиваются весьма интенсивно, снижая этим долговечность металла.

Снижение предела усталости от коррозии можно учитывать по диаграммам, приведенным в трудах С. В. Серенсена и др.

Принимая во внимание факторы различия между лабораторным образцом и элементом конструкции, определим предел усталости последнего, пользуясь следующим уравнением:

$$(\sigma_{-1})_k = \varepsilon \delta_1 \delta_2 \delta_3 \sigma_{-1}, \quad (2)$$

где $(\sigma_{-1})_k$ — предел усталости элемента конструкции;

σ_{-1} — предел усталости полированного лабораторного образца (из того же материала, что и элемент конструкции);

* С. В. Серенсен, Прочность металла и расчет деталей машин, ОНТИ, 1937.

** А. И. Самохоцкий, Усталость черных и цветных металлов, Оборонгиз, 1940.

- ε — коэффициент учета масштабного фактора;
 δ_1 — коэффициент учета концентрации напряжений;
 δ_2 — коэффициент учета чистоты поверхности;
 δ_3 — коэффициент учета коррозии.

Для удобства дальнейшего изложения обозначим произведения этих коэффициентов буквой K , т. е. $K = \varepsilon\delta_1\delta_2\delta_3$. Тогда

$$(\sigma_{-1})_k = K\sigma_{-1}. \quad (3)$$

При асимметричных циклах эти факторы значительно влияют на амплитуду напряжения и очень незначительно на постоянную составляющую (на среднее напряжение цикла), а поэтому:

$$(\sigma_a)_k = K\sigma_a; \quad (4)$$

$$(\sigma_{cp})_k = \sigma_{cp}; \quad (4')$$

$$(\sigma_{\max})_k = (\sigma_a)_k + \sigma_{cp}, \quad (5)$$

где $(\sigma_{\max})_k$ — максимальное усталостное напряжение для элемента конструкции;

$(\sigma_a)_k$ — амплитуда напряжений того же цикла;

(σ_{cp}) — среднее напряжение того же цикла.

Контактные приборы для исследования повторяемости напряжений в металлических конструкциях

В настоящее время при исследовании режимов изменения напряжений в элементах конструкций применяются приборы, записывающие кривые изменения напряжений во времени — тензограммы, которые наглядно характеризуют режимы изменения напряжений. Но существующие приборы не всегда могут обеспечить длительные, необходимые при исследовании нерегулярных режимов изменения напряжений испытания, к тому же обработка данных, полученных посредством этих приборов, весьма утомительна и громоздка.

Желая создать большую возможность для широкого исследования, мы сконструировали приборы-автоматы, регистрирующие числа повторения переменных напряжений и амплитуд напряжений, действующих в исследуемых элементах конструкции: СЗН — счетчик заданных напряжений, СЗА — счетчик заданных амплитуд напряжений и К-СЗН-СЗА — комбинированный счетчик заданных напряжений и амплитуд напряжений.

Эти приборы автоматически отсчитывают числа повторения переменных напряжений, заранее установленных по классам величин, они совмещают процесс испытания с дальнейшим процессом обработки полученных данных и благодаря этому дают возможность охватить в большей мере разнообразие эксплуатационных нагрузок. Конструкция данных приборов позволяет в любое время испытания снять показания со счетчиков и по ним судить о прочностном состоянии испытуемого элемента конструкции в данный момент. Для прибора-автомата нами была выбрана схема, представленная на рис. 1.

Принцип действия прибора заключается в том, что с испытуемым

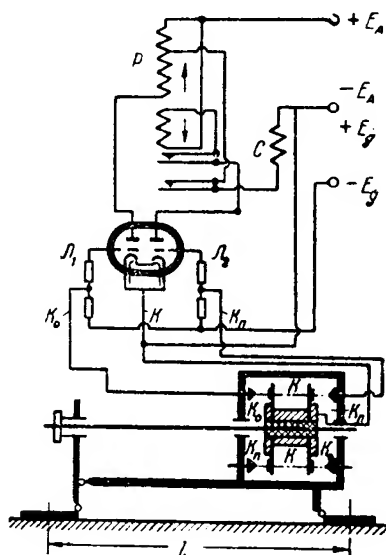


Рис. 1.

волоконном, на поверхности элемента конструкции, связана электрическая контактная пара KK_0 , при замыкании которой должен сработать счетчик импульсов C , питаемый от источника постоянного тока (в случае работы прибора на переменном токе применяется выпрямитель). Для устранения произвольных отсчетов, которые могут возникнуть при вибрациях, в датчик введен дополнительно контакт подготовки K_1 . Этот контакт включен

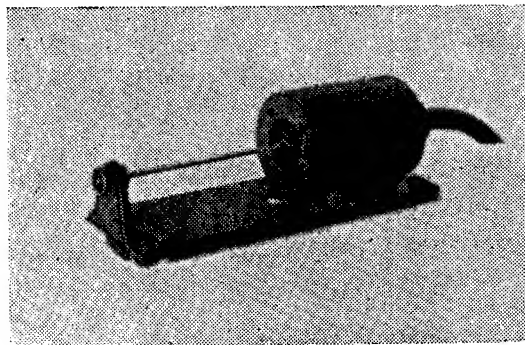


Рис. 2.

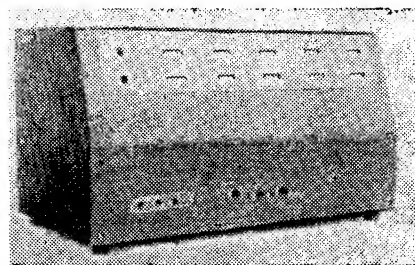


Рис. 3.

в сеточную цепь лампы L_2 . Роль этой контактной пары и реле заключается в подготовке счетчика к отсчету. Без предварительного контакта этой пары не может произойти отсчет на счетчике (вне зависимости от того, сколько бы раз не контактировали пары KK_0). При замыкании контактов KK_1 происходит выключение счетчика, и таким образом счетчик подготавливается к отсчету. Зазоры между контактными парами характеризуют величину деформации элемента конструкции на длине l . Контактные пары размещены в головке датчика, который крепится

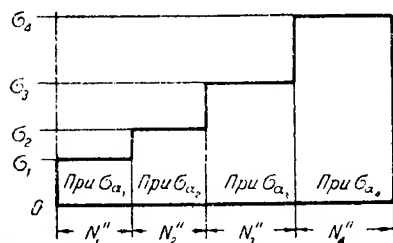


Рис. 4.

к испытываемому элементу конструкции; счетчики импульсов вмонтированы в отдельное устройство, названное регистрирующим пультом. Датчик соединяется с регистрирующим пультом гибкой электропроводкой, позволяющей поместить пульт в удобном для наблюдателя месте.

Прибор-автомат может работать при переменном (127 в) и при постоянном токе (110 или 220 в).

На рис. 2 показан датчик прибора, устанавливаемый на испытуемом элементе конструкции. На рис. 3 показан регистрирующий пульт прибора.

Пробное описание приборов-автоматов приведено в другой нашей статье*.

На основании данных, полученных путем регистрации чисел повторения напряжения приборами СЗН, СЗА и К-СЗН-СЗА, можно построить графики статистической частоты напряжений за срок испытания конструкции и экстраполировать числа повторения напряжений на любой срок ее службы (рис. 4).

Эти графики позволяют статистически характеризовать режимы изменения напряжений в испытуемых элементах конструкции, после чего можно перейти к оценке прочности и долговечности последних.

* Г. В. Корнеев, Контактные приборы для исследования повторяемости напряжений в металлических конструкциях, Информационные материалы Ин-та строительной механики АН УССР, № 4, 1949.

Оценка прочности и долговечности элементов конструкций

Для оценки прочности и долговечности элементов конструкций недостаточно знать только действующие напряжения и числа их повторений за тот или иной срок службы, надо знать еще и предельные характеристики их прочности и долговечности.

Пользуясь схематизированной диаграммой предельных напряжений $\sigma_{\text{макс}} = f(\sigma_{\text{ср}})$, построенной с некоторой степенью приближения по прямолинейной зависимости между максимальными и средними напряжениями, выражаем предельное значение напряжения следующим уравнением:

$$\sigma_{\text{макс}} = \sigma_{-1} + \sigma_{\text{ср}} \operatorname{tg} \beta, \quad (6)$$

где $\operatorname{tg} \beta$ — угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки с координатами $(\sigma_{-1}; 0)$ и $(\sigma_{\text{макс}}, \sigma_{\text{ср}})$.

В литературе по данному вопросу встречается ряд линейных зависимостей, полученных для гладких лабораторных образцов; некоторые часто встречающиеся из них можно привести к следующему виду:

$$\sigma_{\text{макс}} = \sigma_{-1} + \sigma_{\text{ср}}(1 - \psi), \quad (7)$$

где $1 - \psi = \operatorname{tg} \beta$.

Наиболее близкой к действительности является зависимость, предложенная С. В. Серенсенем *, при которой

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (8)$$

Уравнение линейной зависимости между предельными напряжениями асимметричного цикла для элемента конструкции выражается так:

$$\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}} = K\sigma_{-1} + \sigma_{\text{ср}}^{\text{пред}}(1 - K\psi), \quad (9)$$

где $\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}}$ — максимальное предельное напряжение при асимметричном цикле;

$\sigma_{\text{ср}}^{\text{пред}}$ — среднее предельное напряжение при том же цикле.

Приближенная диаграмма предельных напряжений, построенная по зависимости (9) при $\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$, представлена на рис. 5.

Запас прочности при асимметричном цикле линейного напряженного состояния есть отношение максимального предельного напряжения к максимальному напряжению, действующему в элементе конструкции.

Задачей исследователя является определение предельного цикла, с которым следует сравнивать цикл, действующий в элементе конструкции.

Предельный цикл следует определять, исходя из конкретных условий нагружения конструкции.

1. По американскому методу неосновательно предположено, что во всех случаях увеличения нагрузки циклы сохраняются подобными вплоть до разрушения

$$\frac{SS_2'}{OS_2'} = \frac{S_1S_1'}{OS_1'}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sigma_{\text{макс}}^{\text{д}}}{\sigma_{\text{ср}}^{\text{д}}} = \frac{\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}}}{\sigma_{\text{ср}}^{\text{пред}}}.$$

* С. В. Серенсен, Определение запаса прочности при расчете деталей машин, „Вестник машиностроения“, № 6, 1943.

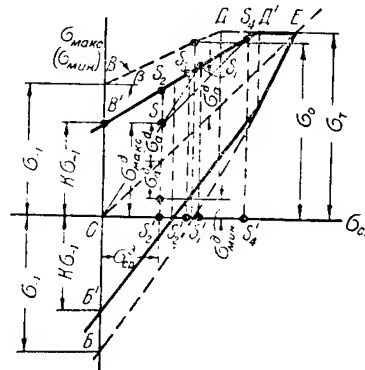


Рис. 5.

В данном случае, пользуясь уравнением (9), максимальное предельное напряжение выразим так:

$$\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}} = \frac{K\sigma_{-1}\sigma_{\text{макс}}^{\text{д}}}{\sigma_{\text{а}}^{\text{д}} + K\psi\sigma_{\text{ср}}^{\text{д}}}. \quad (10)$$

2. В методике Комитета по деталям машин при Союзе немецких инженеров также неосновательно предположено, что во всех случаях увеличения нагрузки среднее напряжение цикла является постоянной величиной

$$\sigma_{\text{ср}}^{\text{пред}} = \sigma_{\text{ср}}^{\text{д}} = \text{const.}$$

В данном случае максимальное предельное напряжение выражается следующим уравнением:

$$\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}} = K\sigma_{-1} + \sigma_{\text{ср}}^{\text{д}}(1 - K\psi). \quad (11)$$

3. В действительности может иметь место разрушающий цикл, амплитуда которого равна амплитуде действующего цикла; такие циклы характерны для резьбовых деталей (болты, шпильки) с предварительной затяжкой

$$\sigma_{\text{а}}^{\text{пред}} = \sigma_{\text{а}} = \text{const.},$$

при этом

$$\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}} = \frac{K\sigma_{-1} - \sigma_{\text{а}}^{\text{д}}(1 - K\psi)}{K\psi}. \quad (12)$$

4. Для конструкций подъемно-транспортных машин характерны циклы при

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{мин}}^{\text{пред}} &= \sigma_{\text{мин}}^{\text{д}} = \text{const.}, \\ \sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}} &= \frac{2K\sigma_{-1} + \sigma_{\text{мин}}^{\text{д}}(1 - K\psi)}{1 + K\psi}. \end{aligned} \quad (13)$$

Каждый из рассмотренных случаев (приведенных на рис. 5) является частным, а поэтому задачей исследователя является изучение зависимости, связывающей два напряжения: максимальное предельное и максимальное действующее в детали или элементе конструкции. Эта зависимость является функцией нагрузки.

Запас прочности выражается следующим уравнением:

$$n = \frac{\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}}}{\sigma_{\text{макс}}^{\text{д}}}. \quad (14)$$

Наибольшее значение $\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}}$ не должно превышать предел текучести, так как диаграмма предельных напряжений ограничивается пределом текучести; поэтому, если $\sigma_{\text{макс}}^{\text{пред}} \geq \sigma_{\text{т}}$, то запас прочности будет равен

$$n' = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{макс}}^{\text{д}}}. \quad (15)$$

Анализируя графики статистической частоты напряжений, действующих в элементах конструкций при нерегулярных нагрузках, рассмотрим следующие три случая:

- 1) действуют только многоступенчатые недогрузочные напряжения;
- 2) действуют только многоступенчатые перегрузочные напряжения;
- 3) действуют многоступенчатые недогрузочные и перегрузочные напряжения.

В первом случае мы предлагаем определять предельные напряжения для испытываемого элемента по наибольшему недогрузочному напряжению, пользуясь для определения максимального предельного напряжения одним из ранее выведенных уравнений (10), (11), (12) или (13), при выборе которого необходимо исходить из конкретных условий загрузки конструкции. В данном случае запас прочности определяется по уравнению (14) или (15).

Во втором случае, когда в элементе конструкции действуют многоступенчатые перегрузочные напряжения (при этом запас прочности получается меньшим единицы), возникает необходимость определения долговечности конструкции. Не исключена возможность того, что действующие перегрузочные напряжения, имея незначительное число повторений, не будут производить опасного для долговечности конструкции разупрочнения материала и элементы ее будут достаточно долговечны. В данном случае необходимо оценить число повторений перегрузок за срок службы конструкции. Пользуясь уравнением (1) и данными испытаний, полученными посредством приборов-автоматов (графиками статистической частоты напряжений), мы вывели для определения долговечности испытываемых элементов конструкций следующее уравнение:

$$T = \frac{t}{\frac{N_1''}{N_1'} + \frac{N_2''}{N_2'} + \dots + \frac{N_k''}{N_k'}}, \quad (16)$$

где T — долговечность конструкции;

t — время, на протяжении которого проводилась регистрация чисел повторения напряжений;

$N_1'', N_2'', \dots, N_k''$ — числа циклов каждого из перегрузочных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, зарегистрированные за время t .

В третьем случае, когда в элементе конструкции действуют многоступенчатые перегрузочные и недогрузочные напряжения и вычисленные по каждой ступени в отдельности запасы прочности оказываются то большими единицы, то меньшими ее, т. е. когда некоторые из действующих напряжений являются перегрузочными, а некоторые — недогрузочными, мы, пренебрегая упрочняющим фактором недогрузочных напряжений, рекомендуем определять долговечность конструкции по уравнению (16).

На основании изложенного нами предлагается следующий порядок исследования прочности конструкций, работающих при нерегулярных режимах нагружения.

1. С помощью приборов-автоматов зарегистрировать числа повторения напряжений и амплитуд напряжений за достаточно длительный срок службы конструкции, охватывающий разнообразные эксплуатационные нагрузки.

2. Данные испытаний свести в таблицы, по которым построить графики статистической частоты напряжений за время испытаний.

3. Определить по одному из уравнений (10), (11), (12), (13) (в зависимости от конкретных условий загрузки конструкции) максимальные предельные напряжения для элемента конструкции (по каждой ступени графика отдельно).

4. Определить запас прочности элемента конструкции: а) если предельное напряжение меньше предела текучести — по уравнению (14); б) если предельное напряжение больше или равно пределу текучести — по уравнению (15).

5. Те напряжения, запас прочности при которых получился меньшим единицы, считаются перегрузочными. Долговечность элемента конструкции, в данном случае, мы рекомендуем определять по уравнению (16).

Выводы

Применение разработанной нами методики экспериментального исследования прочности элементов стальных конструкций, работающих при нерегулярных переменных нагружениях, позволит значительно шире, чем это проводится в настоящее время, изучать прочность и долговечность конструкций. Благодаря предложенной нами методике становится проще и само испытание, и обработка полученных при испытании данных.

Испытание элементов конструкций на прочность по предлагаемой нами методике предусматривает применение приборов-автоматов, обладающих весьма ценным свойством длительного автоматического отсчета чисел повторения переменных напряжений и амплитуд напряжений, заранее установленных по классам величин. Приборы-автоматы совмещают процесс испытания с дальнейшим процессом обработки материалов испытания.

Считаем необходимым отметить, что для указанных исследований прочности могут служить не только сконструированные нами контактные приборы-автоматы, но и приборы, основанные на иных электромеханических принципах.

Исследование прочности стальных конструкций по предлагаемой нами методике позволяет оценить наличие разнообразных переменных нагрузок и, если значения этих нагрузок малы по сравнению с предельными, дает возможность увеличить их, а если велики — уменьшить.

Определение запасов прочности существующих конструкций по данным длительной регистрации чисел повторения напряжений позволяет оценить надежность элементов существующих конструкций при возможных неблагоприятных отклонениях нагрузки, а также позволяет установить рентабельные величины запасов прочности для проектирования конструкций, однотипных с испытуемыми.

Статистика переменных напряжений за длительный промежуток времени работы конструкции, т. е. при самых разнообразных условиях эксплуатации ее, может подсказать пути уточнения аналитических расчетов. Изменения напряжений при нерегулярных режимах нагружения, возможно, подчиняются статистическим закономерностям, определение которых облегчит составление расчетных схем при проектировании конструкций, однотипных с испытуемыми.

**ИЗДАНИЯ
ИНСТИТУТА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ АКАДЕМИИ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР**

СБОРНИКИ

- Збірник праць Інституту технічної механіки, ч. 1, 1926, стр. 121.
Збірник праць Інституту технічної механіки, ч. 2, 1927, стр. 133.
Збірник праць Інституту технічної механіки № 3, 1928, стр. 153.
Збірник праць Інституту технічної механіки № 4, 1929, стр. 207.
Збірник праць Інституту технічної механіки № 5, 1929, стр. 171.
Збірник Інституту будівельної механіки № 6. Питання здешевленого будівництва, 1932, стр. 178.
Збірник праць Інституту будівельної механіки № 7, 1931, стр. 178.
Збірник праць Інституту будівельної механіки № 8, 1948, стр. 144.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 9, 1948, стр. 175.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 10, 1949, стр. 208.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 11, 1949, стр. 171.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 12, 1950, стр. 205.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 13, 1950, стр. 144.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 14, 1950, стр. 152.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 15, 1950, стр. 164.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 16, 1952, стр. 158.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 17, 1952, стр. 176.
Сборник трудов Института строительной механики, т. 18, 1953, стр. 142.
Записки кафедры математической физики, т. I—II, 1937, стр. 365.
Записки кафедры математической физики, т. III, 1937, стр. 215.
Записки кафедры математической физики, т. IV, 1939, стр. 288.
Информационные материалы № 1, 1949, стр. 71.
Информационные материалы № 2, 1949, стр. 54.
Информационные материалы № 3, 1949, стр. 88.
Информационные материалы № 4, 1949, стр. 87.
Информационные материалы № 5, 1950, стр. 67.
Информационные материалы № 6, 1951, стр. 68.
Информационные материалы № 7, 1952, стр. 68.
Информационные материалы № 8, 1952, стр. 92.

МОНОГРАФИИ

- О. А. Уманський, Про розрахунок трямів на пружній основі, 1933, стр. 74.
К. К. Симінський, Праці з питань будівельних матеріалів та конструкцій, 1933, стр. 195.
К. К. Симінський, Просторові ферми, вид. 2, 1934, стр. 162.
Ф. П. Белянкін, Випробування каміння для шляхової покрити, 1934, стр. 56.
С. В. Серенсен, Питання вібраційної міцності металів в розрахунку деталей машин, 1934, стр. 36.
А. Ш. Локшин, До розрахунку прямокутних платівок, підкріплених цупкими ребрами, 1934, стр. 31.
М. Д. Жудін, Порівняння дерев'яно-залізних сегментних ферм з арками. Наближений розрахунок статично невизначених ферм, 1934, стр. 51.
Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Применение методов нелинейной механики к теории возмущений канонических систем (на франц. языке), 1934, ст. 56.

- М. М. Крилов і М. М. Боголюбов, Про деякі формальні розклади нелінійної механіки, 1934, стр. 92.
- О. А. Уманський, Формули і таблиці для розрахунку балок із вутами, 1934, стр. 38.
- Л. С. Ямпольський, Розрахунок багатоколінчатих валів, 1935, стр. 95.
- М. Д. Жудін, Пластичні деформації в сталених конструкціях. Основи розрахунку 1935, стр. 218.
- А. Л. Гольденвейзер, Розрахунок тонкостінних оболонок на цупких діафрагмах; В. З. Власов, Загальний метод розрахунку циліндричних оболонок, 1935, стр. 102.
- Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, 1934, стр. 112.
- Ю. Репман, Загальний метод розрахунку тонких плит, 1935, стр. 44.
- П. М. Варвак, А. М. Василенко, О. В. Герасимюк, Д. В. Соколов, О. І. Стрельбицька, Є. М. Тимченко, Про уточнення методів розрахунку корпусу річкових суден, під ред. проф. О. А. Уманського, 1935, стр. 172.
- М. М. Афанасьєв, С. В. Малашенко, Старіння котельного заліза та робота його в котлі, 1935, стр. 149.
- Ф. П. Белянкін, Фізико-механічні характеристики каміння Поділля і Волині, 1935, стр. 32.
- С. В. Серенсен, Концентрація напружень і втома у колінчастих валах, 1935, стр. 43.
- Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Приближенные методы нелинейной механики в их применении к изучению возмущения периодических движений и различных, сюда относящихся, явлений резонанса (на франц. языке), 1935, стр. 113.
- Ф. П. Белянкін, Пластичні деформації і підтримуюча дія при згині дерев'яних балок, 1936, стр. 79.
- О. А. Уманський і В. А. Мар'їн, До розрахунку довгих і багатопрогінних балок на пружній основі, 1935, стр. 79.
- Стійкість арок, Збірник праць під ред. проф. О. А. Уманського, 1936, стр. 172.
- О. А. Уманський, Про розрахунок багатопрогінних пружноопертих балок за методом початкових параметрів, 1935, стр. 48.
- М. М. Афанасьєв, Досліди з віброміцності, 1936, стр. 71.
- М. В. Корноухов, Перевірка стійкості стиснено-зігнутих конструкцій за границею пружності. Стиснено-зігнутий стрижень, ч. I, 1936, стр. 112.
- Ф. П. Белянкін, Міцність деревини під впливом повторного навантаження, 1936, стр. 127.
- С. В. Малашенко, Дослідження вібраційної міцності плакірованого дюралюмінію і вплив на неї заклепок і корозії, 1936, стр. 30.
- В. Г. Чудновський, Про розрахунок колових циліндричних оболонок з ребрами великої цупкості, 1936, стр. 68.
- М. Д. Жудін, Пластичні деформації в сталених конструкціях, II. Сталі без площадки текучості. Дослідження роботи перерізу, 1936, стр. 160.
- М. М. Фрохт, Оптичний метод дослідження концентрації напружень (на укр. і на русск. яз.), 1936, стр. 41.
- С. В. Серенсен, Міцність металу і розрахунок деталей машин під змінними навантаженнями, 1937, стр. 101.
- О. І. Стрельбицька, Розрахунок простих рам при пластичних деформаціях, 1937, стр. 131.
- Институт строительной механики к XX-летию Великой Октябрьской социалистической революции (очерк), 1-38, стр. 39.
- М. М. Афанасьєв, Причини виникнення тріщин у парових котлах, 1938, стр. 60.
- Ф. П. Белянкін, Дослідження міцності дерев'яних балок (згин та ексцентричний стиск — розтяг), 1938, стр. 73.
- Исследование устойчивости пространственного каркаса по типу высотной части Дворца Советов СССР (под ред. Н. В. Корноухова), 1938, стр. 242.
- А. Д. Коваленко, Дослідження розподілу напруг в колесі турбокомпресора з лопатками, розміщеними по радіусу, 1938, стр. 100.
- Г. М. Савін, Основна плоска статична задача теорії пружності для анізотропного середовища (однорівняна нескінченна область), 1938, стр. 59.
- С. В. Серенсен, Гіпотези міцності при змінному навантаженні, 1938, стр. 30.
- Ф. П. Белянкін, Вплив асиметричних циклів навантаження і концентрацій напруг на міцність деревини при повторних навантаженнях, 1938, стр. 40.
- М. М. Афанасьєв, Вплив ударного навантаження на границю втоми нітрированих зразків, 1938, стр. 25.
- А. А. Білоус, Власні і змушені коливання рам, 1939, стр. 117.
- М. Д. Жудін і О. І. Стрельбицька, Пластичні деформації в сталених конструкціях (експериментальне дослідження границі текучості при згині), 1939, стр. 148.

- Ф. П. Белянкін, Механічні характеристики деревини дуба і сосни при різних гідротермічних станах її в зв'язку з теорією гнотарного процесу, 1939, стр. 123.
- М. І. Черняк, Вплив швидкості деформування на характеристики напруженого стану, 1939, стр. 105.
- В. Г. Чудновський, Частота власних коливань стрижнів і рам і динамічний критерій їх стійкості, 1939, стр. 72.
- Питання будівельної механіки. Збірник праць під ред. чл.-кор. М. В. Корноухова, 1940, стр. 265.
- С. А. Пальчевський, Пластичні деформації в сталених конструкціях. Приклади розрахунку, 1940, стр. 178.
- Д. В. Вайнберг, В. Г. Чудновський, Розрахунок просторових рамних каркасів, 1940, стр. 136.
- Н. Д. Жудин, Испытание моделей колонн Дворца Советов СССР, 1941, стр. 84.
- Ф. П. Белянкін, Енергетична границя текучості металів, 1941, стр. 49.
- Б. Н. Горбунов и А. И. Стрельбицкая, Расчет вагонных рам из тонкостенных профилей, 1947, стр. 139.
- П. М. Варвак, Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. I, 1949, стр. 136.
- Ф. П. Белянкін, Прочность и деформативность деревянных стержней при кручении, 1949, стр. 96.
- А. Д. Коваленко, Теория расчета на прочность колес турбомашин, 1950, стр. 124.
- В. М. Майзель, Температурная задача теории упругости, 1951, стр. 152.
- А. М. Василенко, Расчет пространственных форм крановых конструкций на кручение, 1951, стр. 51.
- Д. В. Вайнберг, Напряженное состояние составных дисков и пластин, 1952, стр. 420.
- В. Г. Чудновский, Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем, 1952, стр. 417.
- П. М. Варвак, Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. II, 1952, стр. 116.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ИЗДАНИЯ

- С. В. Серенсен, Аварії в промисловості та будівництві, 1931, ст. 27.
- М. М. Афанасьев, Рационализация термического обработки стали, 1932, стр. 47.
- В. А. Дунькович, Прочность хромовых покрытий, 1948, стр. 66.
- Б. Д. Грозин, Износ и механическая обработка металла, 1948, стр. 47.
- Д. А. Драйгор, Износ деталей машин, 1948, стр. 43.
- Н. Н. Давиденков, Усталость металлов, 1949, стр. 63.
- К. К. Хренов, Новости сварочной техники, 1949, стр. 87.
- Ф. П. Белянкін, Современные методы расчета прочности элементов деревянных конструкций, 1951, стр. 19.

Список опечаток

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
47	Формула (3.9)	$\dots + \sqrt{\frac{G^2}{L}} - \dots$	$\dots + \sqrt{\frac{G^2}{L^3}} - \dots$
56	13—14 св.	...нагруженной...	...наружной...
63	3 сн.	...предполагаемой...	...предлагаемой...
78	Формула (7)	$\Delta\varphi_{\text{лев}} = \int_{x_a}^{\eta_l} \frac{\Delta M x dx}{l} \int_{\eta_l}^{x_l} \frac{\Delta M x dx}{l}.$	$\Delta\varphi_{\text{лев}} = \int_{x_a}^{\eta_l} \frac{\Delta M x dx}{l} + \int_{\eta_l}^{x_b} \frac{\Delta M x dx}{l}.$
80	12 св.	...путем А. А. Гвоздев...	...путем получил А. А. Гвоздев...
138	13 сн.	Пробное...	Подробное...

10 руб. 60 коп.

№ 18

СБОРНИК ТРУДОВ ИНСТИТУТА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

1953

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/21 : CIA-RDP80T00246A032500880001-4

25X1

Page Denied

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/21 : CIA-RDP80T00246A032500880001-4